УДК 517.95 : 519.63

# ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ *R*-ФУНКЦІЙ ДО ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ В'ЯЗКИХ ТЕЧІЙ У ОБЛАСТЯХ ЗІ ЗМІННОЮ МЕЖЕЮ

*ПОЛКОВНИЧЕНКО Є.Ю.*

Розглядається нестаціонарна течія в'язкої рідини в області, форма якої змінюється з плином часу. Для відповідної початково-крайової задачі відносно функції течії пропонується метод її чисельного аналізу, заснований на використанні методу послідовних наближень, методу *R*-функцій та методу Гальоркіна. Наводяться результати обчислювального експерименту.

**Ключові слова:** нестаціонарна течія в'язкої рідини, область з рухомою межею, функція течії, метод послідовних наближень, метод Гальоркіна метод R-функцій.

**Key words:** nonstationary viscous fluid flow, domain with movable boundary, stream function, successive approximation method, Galerkin's method, the R-function method.

**Вступ.** Задача дослідження течій в'язкої нестисливої рідини часто виникає при аналізі реальних течій в науці та техніці. В останні роки сфера дослідження і застосування явищ, пов'язаних з рухом рідини, постійно розширюється і охоплює провідні напрямки промисловості та ряд природничих наук. При цьому виникає необхідність досліджувати течії, в яких нестаціонарність проявляється залежно не тільки від часу характеристик течії, а й від часу області, в якій течія розглядається.

Існуючі чисельні методи аналізу в'язких течій (метод скінченних різниць, скінченних елементів та ін. [9, 13, 14]) прості в реалізації, але не мають необхідної властивості універсальності – при переході до нової області (особливо некласичної геометрії) необхідно генерувати нову сітку, а часто і замінювати складні ділянки межі простими, складеними, наприклад, з відрізків прямих.

Точно врахувати геометричну інформацію, що входить до постановки задачі, можна скориставшись конструктивним апаратом теорії *R*-функцій, запропонованим акад. НАН України В.Л. Рвачовим [8]. Для розрахунку в'язких течій метод R-функцій застосовувався у роботах [1 – 3, 5, 10 – 12], однак в'язкі течії в областях з рухомою (такою, що змінює з часом форму) межею за допомогою методу *R*-функцій не вивчалися.

Отже, розробка нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу в'язких течій є актуальною науковою задачею.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [7], і розповсюджує їх на випадок течій, які не можна вважати повільними.

**1. Мета та задачі дослідження.** Метою роботи є розробка нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу плоских нестаціонарних течій в'язкої рідини в областях з рухомою межею. Для досягнення поставленої мети необхідно:

– сформулювати задачу моделювання течії в'язкої рідини в областях з рухомою межею;

– розробити метод розв'язання задачі моделювання течії в'язкої рідини в областях з рухомою межею, заснований на спільному застосуванні методів послідовних наближень, R-функцій і Гальоркіна;

– провести обчислювальні експерименти.

**2. Постановка задачі.** Розглянемо плоску нестаціонарну течію в'язкої нестисливої рідини в області $\Omega(t)$, форма якої змінюється з плином часу $t$. Нехай область $\Omega(t)$ є двозв'язною і її межа $\partial\Omega(t)$ складається з зовнішнього контура $\partial\Omega_0$, який вважатимемо незмінним в часі, і внутрішнього контура $\partial\Omega_1(t)$, форма якого з плином часу може змінюватися.

Вважатимемо, що межі області є непроникними твердими стінками, зовнішня межа нерухома, а течія в $\Omega(t)$ розвивається із стану спокою та викликана обертанням внутрішнього контура $\partial\Omega_1(t)$. Потрібно визначити поле швидкостей $(v_x, v_y)$ течії в області $\Omega(t)$ в моменти часу $t > 0$.

Математичне моделювання плоских течій зручно проводити за допомогою функції течії $\psi(x, y, t)$, яка вводиться співвідношеннями [4]

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Для функції течії $\psi(x, y, t)$ можна поставити таку початково-крайову задачу:

$$-\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2\psi =$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} \quad \forall(x, y) \in \Omega(t), \ t > 0, \qquad (1)$$

$$\psi\big|_{t=0} = 0, \qquad (2)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi\big|_{\partial\Omega_1(t)} = c(t), \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1(t)} = g(t), \qquad (4)$$

де $\mathbf{Re}$ – число Рейнольдса; $c(t)$ – деяка невідома функція від $t$; $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до межі області $\Omega(t)$; $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бігармонічний оператор.

Функція $g(t)$ задається, виходячи із заданої на $\partial\Omega_1(t)$ швидкості рідини [10]. Функцію $c(t)$ потрібно знайти із умови однозначності тиску в многозв'язній області, яка має вигляд [11]

$$\oint_{\partial\Omega_1(t)} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial \mathbf{n}} ds = 0, \qquad (5)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Позначимо $\partial\Omega(t) = \partial\Omega_0 \bigcup \partial\Omega_1(t)$.

**3. Метод чисельного аналізу.** Для розв'язання завдання (1) – (5) скористаємося методами послідовних наближень і *R*-функцій [8].

Послідовні наближення формуватимемо за схемою (нехай початкове наближення $\psi^{(0)}$ задано і побудовано наближення $\psi^{(k)}$):

$$-\frac{\partial \Delta\psi^{(k+1)}}{\partial t} + \frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2\psi^{(k+1)} = \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y}\frac{\partial \Delta\psi^{(k)}}{\partial x} - $$
$$-\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial x}\frac{\partial \Delta\psi^{(k)}}{\partial y} \quad \forall (x,y) \in \Omega(t),\ t > 0, \qquad (6)$$

$$\psi^{(k+1)}\Big|_{t=0} = 0, \qquad (7)$$

$$\psi^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega_1(t)} = c^{(k+1)}(t), \qquad (8)$$

$$\left.\frac{\partial \psi^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \psi^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1(t)} = g(t), \qquad (9)$$

$$\oint_{\partial\Omega_1(t)} \frac{\partial \Delta\psi^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}} ds = 0. \qquad (10)$$

За початкове наближення $\psi^{(0)}$ можна взяти, наприклад, наближення Стокса [7].

Для розв'язання задачі (6) – (10) на кожній ітерації скористаємося принципом суперпозиції і методом R-функцій. Відповідності до принципу суперпозиції [11] розв'язок задачі (6) – (10) подамо у вигляді суми

$$\psi^{(k+1)}(x,y,t) = \psi_0^{(k+1)}(x,y,t) +$$
$$+ c^{(k+1)}(t) \cdot \psi_1^{(k+1)}(x,y,t), \qquad (11)$$

де $\psi_0^{(k+1)}(x,y,t)$ – розв'язок задачі

$$-\frac{\partial \Delta\psi_0^{(k+1)}}{\partial t} + \frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2\psi_0^{(k+1)} = \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y}\frac{\partial \Delta\psi^{(k)}}{\partial x} - $$
$$-\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial x}\frac{\partial \Delta\psi^{(k)}}{\partial y} \quad \forall (x,y) \in \Omega(t),\ t > 0, \qquad (12)$$

$$\psi_0^{(k+1)}\Big|_{t=0} = 0, \qquad (13)$$

$$\psi_0^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega(t)} = 0, \qquad (14)$$

$$\left.\frac{\partial \psi_0^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \psi_0^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1(t)} = g(t), \qquad (15)$$

а $\psi_1^{(k+1)}(x,y,t)$ – розв'язок задачі

$$-\frac{\partial \Delta\psi_1^{(k+1)}}{\partial t} +$$
$$+\frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2\psi_1^{(k+1)} = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega(t),\ t > 0, \qquad (16)$$

$$\psi_1^{(k+1)}\Big|_{t=0} = 0, \qquad (17)$$

$$\psi_1^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega_0} = 0, \qquad (18)$$

$$\psi_1^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega_1(t)} = 1, \quad \left.\frac{\partial \psi_1^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega(t)} = 0. \qquad (19)$$

Тоді, підставивши (11) в (10), отримаємо, що

$$c^{(k+1)}(t) = -\frac{\oint\limits_{\partial\Omega_1(t)} \frac{\partial \Delta\psi_0^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}} ds}{\oint\limits_{\partial\Omega_1(t)} \frac{\partial \Delta\psi_1^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}} ds}.$$

Структури розв'язку початково-крайових задач (12) – (15) і (16) – (19) будуються аналогічно тому, як це було зроблено в [10, 11], і мають вигляд:

$$\psi_0 = -\omega \frac{g \cdot \omega_0}{\omega_0 + \omega_1} + \omega^2 \Phi_0, \qquad (20)$$

$$\psi_1 = \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} - \omega D_1\left(\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1}\right) + \omega^2 \Phi_1, \qquad (21)$$

де $\Phi_0$, $\Phi_1$ – невизначені компоненти, оператор $D_1$ визначається рівністю $D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}$.

Функції $\omega = \omega(x,y,t)$, $\omega_0 = \omega_0(x,y)$, $\omega_1 = \omega_1(x,y,t)$, що входять в (20), (21), будуються за допомогою методу *R*-функцій [8] і повинні задовольняти умови:

при будь-якому $t \ge 0$

$$\omega = 0 \text{ на } \partial\Omega(t);\ \omega > 0 \text{ у } \Omega(t);\ \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega(t),$$

$$\omega_0 = 0 \text{ на } \partial\Omega_0;\ \omega_0 > 0 \text{ у } \Omega(t) \bigcup \partial\Omega_1(t);$$

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial \mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega_0,$$

при будь-якому $t \ge 0$

$$\omega_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega_1(t);\ \omega_1 > 0 \text{ у } \Omega(t) \bigcup \partial\Omega_0;$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{n}}=-1 \text{ на } \partial\Omega_1(t).$$

Отже, функція $\psi_0^{(k+1)}$ вигляду (20) при будь-якому виборі невизначеної компоненти $\Phi_0$ точно задовольняє крайовим умовам (14), (15), а функція $\psi_1^{(k+1)}$ вигляду (21) при будь-якому виборі невизначеної компоненти $\Phi_1$ точно задовольняє крайовим умовам (18), (19).

Для апроксимації невизначених компонент в структурних формулах можна скористатися методом Гальоркіна для нестаціонарних задач [6].

У задачі (12) - (15) зробимо заміну

$$\psi_0^{(k+1)}=\varphi_0+u_0, \tag{22}$$

де $\varphi_0=-\omega\frac{g\omega_0}{\omega_0+\omega_1}$, $u_0$ – нова невідома функція.

В цьому випадку для функції $u_0(x,y,t)$ отримаємо початково-крайову задачу з однорідними крайовими умовами:

$$-\frac{\partial\Delta u_0}{\partial t}+\frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2u_0=F_0 \quad \forall(x,y)\in\Omega(t),\ t>0, \tag{23}$$

$$u_0\big|_{t=0}=-\varphi_0\big|_{t=0}, \tag{24}$$

$$u_0\big|_{\partial\Omega(t)}=0,\ \frac{\partial u_0}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega(t)}=0, \tag{25}$$

де позначимо

$$F_0=\frac{\partial\Delta\varphi_0}{\partial t}-\frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2\varphi_0+\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi^{(k)}}{\partial x}-\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi^{(k)}}{\partial y}.$$

Відповідно до методу Гальоркіна для нестаціонарних задач розв'язок задачі (23) – (25) шукатимемо у вигляді

$$u_{0,n}(x,y,t)=\sum_{k=1}^{n}c_{0,k}(t)\varphi_k(x,y,t), \tag{26}$$

де $c_{0,k}(t)$ – невідомі функції, $k=1,2,...,n$; $\varphi_k(x,y,t)=\omega^2(x,y,t)\tau_k(x,y)$ – координатні функції; $\tau_k(x,y)$, $k=1,2,...,$ – будь-яка повна в $L_2(\Omega(0))$ система функцій.

Функції $c_{0,1}(t),...,c_{0,n}(t)$ знайдемо з умови ортогональності нев'язки:

$$R_{0,n}(x,y,t)=-\frac{\partial\Delta u_{0,n}}{\partial t}+\frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2u_{0,n}-F_0=$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}\dot{c}_{0,k}(t)\Delta\varphi_k-\sum_{k=1}^{n}c_{0,k}(t)\frac{\partial\Delta\varphi_k}{\partial t}+$$
$$+\frac{1}{\mathbf{Re}}\sum_{k=1}^{n}c_{0,k}(t)\Delta^2\varphi_k-F_0,$$

отриманої підстановкою (26) до (23), першим $n$ координатним функціям $\varphi_1,...,\varphi_n$.

Це призводить до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$-\sum_{k=1}^{n}\dot{c}_{0,k}(t)(\Delta\varphi_k,\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}c_{0,k}(t)\left(\frac{\partial\Delta\varphi_k}{\partial t},\varphi_j\right)_{L_2(\Omega(t))}+ \tag{27}$$
$$+\frac{1}{\mathbf{Re}}\sum_{k=1}^{n}c_{0,k}(t)(\Delta^2\varphi_k,\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}=(F_0,\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))},$$
$$j=1,2,...,n.$$

Застосовуючи першу і другу формули Гріна і з огляду на крайові умови (25), скалярний добуток у (27) можна привести до вигляду:

$$(\Delta\varphi_k,\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}=\iint_{\Omega(t)}\Delta\varphi_k\cdot\varphi_j dxdy=$$
$$=-\iint_{\Omega(t)}\nabla\varphi_k\nabla\varphi_j dxdy+\int_{\partial\Omega(t)}\varphi_j\frac{\partial\varphi_k}{\partial\mathbf{n}}ds=$$
$$=-\iint_{\Omega(t)}\nabla\varphi_k\nabla\varphi_j dxdy=-(\nabla\varphi_k,\nabla\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))},$$

$$\left(\frac{\partial\Delta\varphi_k}{\partial t},\varphi_j\right)_{L_2(\Omega(t))}=\iint_{\Omega(t)}\frac{\partial\Delta\varphi_k}{\partial t}\varphi_j dxdy=$$
$$=\iint_{\Omega(t)}\Delta\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\varphi_j dxdy=$$
$$=-\iint_{\Omega(t)}\nabla\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\nabla\varphi_j dxdy+\int_{\partial\Omega(t)}\varphi_j\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\right)ds=$$
$$=-\iint_{\Omega(t)}\nabla\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\nabla\varphi_j dxdy=-\left(\nabla\frac{\partial\varphi_k}{\partial t},\nabla\varphi_j\right)_{L_2(\Omega(t))},$$

$$(\Delta^2\varphi_k,\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}=\iint_{\Omega(t)}\Delta^2\varphi_k\varphi_j dxdy=$$
$$=\iint_{\Omega(t)}\Delta\varphi_k\Delta\varphi_j dxdy+\int_{\partial\Omega(t)}\left(\varphi_j\frac{\partial\Delta\varphi_k}{\partial\mathbf{n}}-\Delta\varphi_k\frac{\partial\varphi_j}{\partial\mathbf{n}}\right)ds=$$
$$=\iint_{\Omega(t)}\Delta\varphi_k\Delta\varphi_j dxdy=(\Delta\varphi_k,\Delta\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))},$$

$$(F_0,\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}=\iint_{\Omega(t)}F_0\varphi_j dxdy.$$

Тоді система (27) набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{c}_{0,k}(t)(\nabla\varphi_k,\nabla\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}c_{0,k}(t)\left[\left(\nabla\frac{\partial\varphi_k}{\partial t},\nabla\varphi_j\right)_{L_2(\Omega(t))}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\mathbf{Re}}(\Delta\varphi_k,\Delta\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}\right]=(F_0,\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}. \tag{28}$$

Введемо в розгляд матриці $A(t)=[a_{jk}(t)]_{j,k=\overline{1,n}}$, $B(t)=[b_{jk}(t)]_{j,k=\overline{1,n}}$ та вектори $\mathbf{f}(t)=[f_j(t)]_{j=\overline{1,n}}$, $\mathbf{c}_0(t)=[c_{0,k}(t)]_{k=\overline{1,n}}$, де

$$a_{jk}(t)=(\nabla\varphi_k,\nabla\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))},$$

$$b_{jk}(t) = \left(\nabla \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}, \nabla \varphi_j\right)_{L_2(\Omega(t))} + \frac{1}{\mathbf{Re}}(\Delta\varphi_k, \Delta\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))},$$

$$f_j(t) = (F_0, \varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}.$$

Тоді система звичайних диференціальних рівнянь (28) у матричному вигляді запишеться так:

$$A(t)\dot{\mathbf{c}}_0(t) + B(t)\mathbf{c}_0(t) = \mathbf{f}(t). \qquad (29)$$

Початкові умови $c_{0,k}(0) = c^0_{0,k}$, $k = 1, 2, ..., n$, для системи (29) отримаємо з умови ортогональності нев'язки

$$r_{0,n}(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_{0,k}(0)\varphi_k\big|_{t=0} + \varphi_0\big|_{t=0},$$

одержаної підстановкою (26) до (24), першим $n$ координатним функціям $\varphi_1, ..., \varphi_n$, обчисленим при $t = 0$.

Це призводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n} c_{0,k}(t)(\varphi_k\big|_{t=0}, \varphi_j\big|_{t=0})_{L_2(\Omega(0))} =$$

$$= -(\varphi_0\big|_{t=0}, \varphi_j\big|_{t=0})_{L_2(\Omega(0))}, \ j = 1, 2, ..., n. \qquad (30)$$

Введемо до розгляду матрицю $D = [d_{jk}]_{j,k=\overline{1,n}}$ та вектори $\mathbf{h} = [h_j]_{j=\overline{1,n}}$, $c^0 = [c^0_{0,k}]_{k=\overline{1,n}}$, де

$$d_{jk} = (\varphi_k\big|_{t=0}, \varphi_j\big|_{t=0})_{L_2(\Omega(0))},$$

$$h_j = -(\varphi_0\big|_{t=0}, \varphi_j\big|_{t=0})_{L_2(\Omega(0))}.$$

Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь (30) у матричному вигляді запишеться так:

$$D\mathbf{c}^0 = \mathbf{h}. \qquad (31)$$

Отже, для знаходження функцій $c_{0,1}(t), ..., c_{0,n}(t)$ з (26) потрібно розв'язати задачу Коші (29), (31).

Задача (16) – (19) розв'язується аналогічно.

Ітераційний процес, який формуємо за схемою (6) – (10), слід припинити за умови виконання нерівності

$$\int_0^T \left\| \psi^{(k+1)} - \psi^{(k)} \right\|^2_{L_2(\Omega(t))} dt < \varepsilon.$$

**4. Результати обчислювального експерименту.**

Для прикладу розглянемо прямокутну область з «гвинтом», вид якої у момент час $t = 0$ відображено на рис. 1. Вважатимемо, що область обмежена непроникними твердими стінками, зовнішня межа нерухома, а течія викликана обертами «гвинта» з постійною кутовою швидкістю $w$.

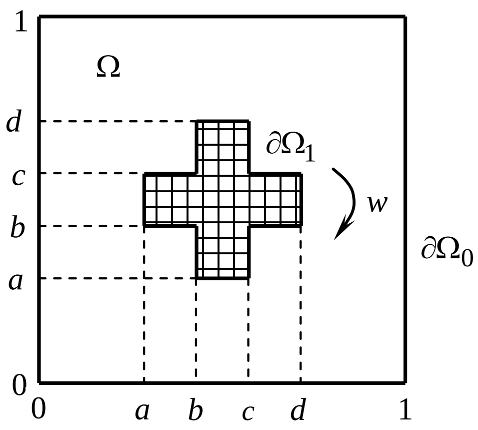


Рис. 1. Вигляд області $\Omega(t)\big|_{t=0}$

Обчислювальний експеримент було проведено для задачі (1) – (5) в області $\Omega(t)$ (див. рис. 1) при $a = \frac{2}{7}$, $b = \frac{3}{7}$, $c = \frac{4}{7}$, $d = \frac{5}{7}$ та $w = 3$. Число Рейнольдса було обрано $\mathbf{Re} = 10$, а $\varepsilon = 10^{-4}$.

Для розглядуваної області $\Omega(t)$ функції $\omega$, $\omega_0$, $\omega_1$ мають вигляд:

$$\omega(x,y,t) = [\omega_0(x,y)] \wedge_0 [\omega_1(x,y,t)],$$

$$\omega_0(x,y) = [x(1-x)] \wedge_0 [y(1-y)],$$

$$\omega_1(x,y,t) = -[\sigma_1(x',y')] \vee_0 [\sigma_2(x',y')],$$

де

$$\sigma_1(x',y') =$$

$$= \left[7\left(\frac{4}{7} - x'\right)\left(x' - \frac{3}{7}\right)\right] \wedge_0 \left[\frac{7}{3}\left(\frac{5}{7} - y'\right)\left(y' - \frac{2}{7}\right)\right],$$

$$\sigma_2(x',y') =$$

$$= \left[\frac{7}{3}\left(\frac{5}{7} - x'\right)\left(x' - \frac{2}{7}\right)\right] \wedge_0 \left[7\left(\frac{4}{7} - y'\right)\left(y' - \frac{3}{7}\right)\right],$$

$$x' = \left(x - \frac{1}{2}\right)\cos wt - \left(y - \frac{1}{2}\right)\sin wt + \frac{1}{2},$$

$$y' = \left(x - \frac{1}{2}\right)\sin wt + \left(y - \frac{1}{2}\right)\cos wt + \frac{1}{2},$$

$\wedge_0$ – знак *R*-кон'юнкції, $u \wedge_0 v = u + v - \sqrt{u^2 + v^2}$;

$\vee_0$ – знак *R*-диз'юнкції, $u \vee_0 v = u + v + \sqrt{u^2 + v^2}$.

Подвійні інтеграли, що входять до системи диференціальних рівнянь методу Гальоркіна, обчислювалися за кубатурною формулою Гаусса з 16 вузлами по кожній змінній, дискретизація за часом проводилася з кроком $\Delta t = 0{,}01$. Як повна система функцій, якими апроксимувались невизначені компоненти, що входять до структур розв'язку (20) – (21), використовувалися зсунуті поліноми Лежандра.

На рис. 2 – 4 показано лінії рівня функції течії в різні моменти часу.

**5. Висновки.** Розглянуто постановку задачі розрахунку нестаціонарної течії в'язкої нестисливої рідини в області з рухомою межею. Для відповідної початково-крайової задачі розроблено метод її чисельного аналізу, заснований на сумісному використанні методу послідовних наближень, структурного методу (методу R-функцій) та методу Гальоркіна для нестаціонарних задач.

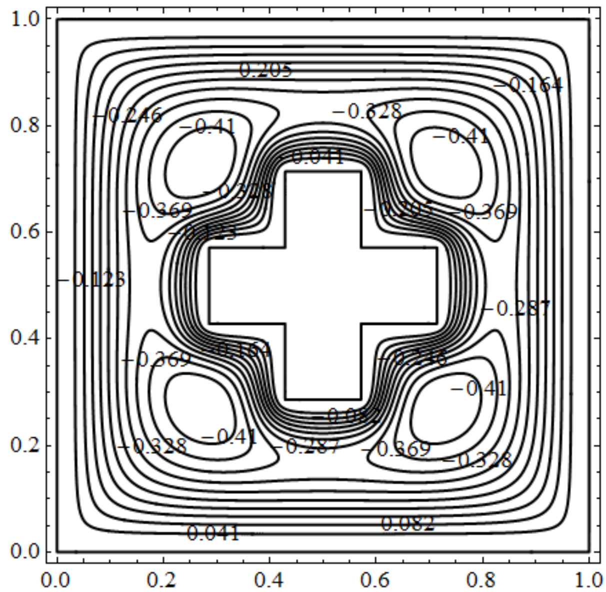


Рис. 2. Лінії течії в момент часу $t = 0$

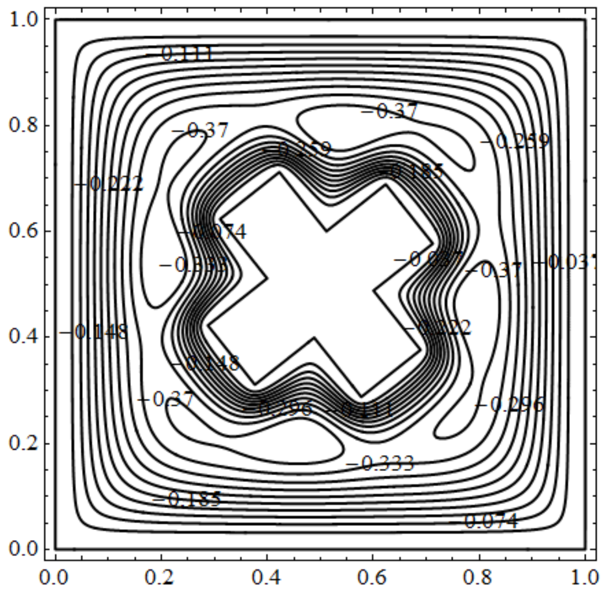


Рис. 3. Лінії течії в момент часу $t = 0,4$

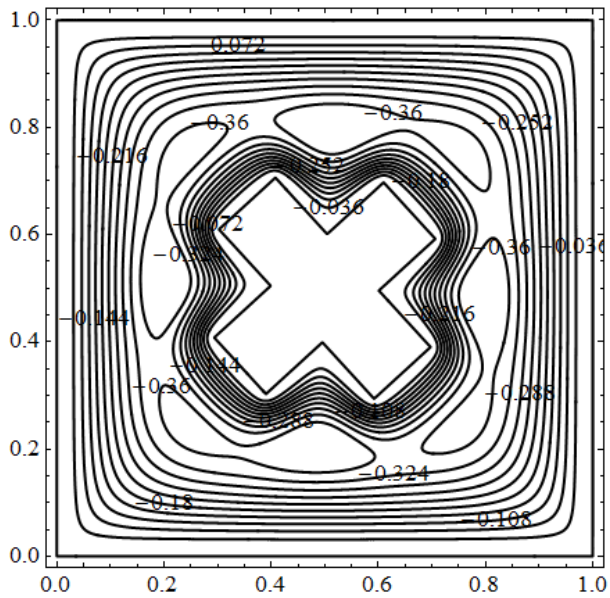


Рис. 4. Лінії течії в момент часу $t = 0,8$

Отже, отримали подальший розвиток застосування структурного методу (методу R-функцій) у математичному моделюванні фізико-механічних полів, а також вдосконалено метод математичного моделювання нестаціонарних течій в'язкої нестисливої рідини у частині його розповсюдження на області, форма яких змінюється з плином часу.

Отримані результати можна застосувати при розв'язанні прикладних задач, пов'язаних з розрахунком течій в'язкої рідини. Це і визначає наукову новизну та практичну значущість отриманих у роботі результатів.

**Література:** **1.** *Артюх А.В., Сидоров М.В.* Исследование нестационарных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости (приближение Стокса) методами R-функций и Галеркина // Радиоэлектроника и информатика. 2011. № 3 (54). С. 16-21. **2.** *Артюх А.В., Сидоров М.В.* Применение методов R-функций и Галеркина к расчету плоских нестационарных вязких течений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2011. № 2. С. 5-12. **3.** *Колосова С.В., Сидоров М.В.* Применение метода R–функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. 2003. № 602. С. 61-67. **4.** *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с. **5.** *Максименко-Шейко К.В.* Исследование течения несжимаемой вязкой жидкости в скрученных каналах сложного профиля методом R-функций // Проблемы машиностроения. 2001. Т. 4, № 3-4. С. 108-116. **6.** *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с. **7.** *Полковниченко Е.Ю., Сидоров М.В., Шульгина С.С.* Математическое моделирование и численный анализ течений вязкой несжимаемой жидкости в областях с подвижной границей // Вісник Запорізького національного університету. Серія:

фізико-математичні науки. 2014. № 1. С. 128-139. **8.** *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. **9.** *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с. **10.** *Сидоров М.В.* О построении структур решений задачи Стокса. Радиоэлектроника и информатика. 2002. №3 (20). С. 39-42. **11.** *Сидоров М.В.* Приближенный метод расчета многосвязных вязких течений // Радиоэлектроника и информатика. 2003. № 1 (22). С. 42-44. **12.** *Тевяшев А.Д., Гибкина Н.В., Сидоров М.В.* Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях. Радиоэлектроника и информатика. 2007. № 2 (37). С. 50-57. **13.** *Donea J., Huerta A.* Finite Element Methods for flow Problems. London: Wiley, 2003. 350 p. **14.** *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Vol. 3: Fluid Dynamics. Oxford: BH, 2000. 334 p.

**Transliterated bibliography:**

**1.** *Artyukh A.V., Sidorov M.V.* Issledovaniye nestatsionarnykh ploskoparallelnykh techeniy vyazkoy neszhimayemoy zhidkosti (priblizheniye Stoksa) metodami R-funktsiy i Galerkina. Radioelektronika i informatika. 2011. № 3 (54). P. 16-21.

**2.** *Artyukh A.V., Sidorov M.V.* Primeneniye metodov R-funktsiy i Galerkina k raschetu ploskikh nestatsionarnykh vyazkikh techeniy. Visnik Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Seriya: fiziko-matematichni nauki. 2011. № 2. P. 5-12.

**3.** *Kolosova S.V., Sidorov M.V.* Primeneniye metoda R-funktsiy k raschetu ploskikh techeniy vyazkoy zhidkosti. Visn. KhNU. Ser. Prikl. matem. i mekh. 2003. № 602. P. 61-67.

**4.** *Loytsyanskiy L.G.* Mekhanika zhidkosti i gaza. M.: Drofa. 2003. 840 p.

**5.** *Maksimenko-Sheyko K.V.* Issledovaniye techeniya neszhimayemoy vyazkoy zhidkosti v skruchennykh kanalakh slozhnogo profilya metodom R-funktsiy. Problemy mashinostroyeniya. 2001. T. 4. № 3-4. P. 108-116.

**6.** *Mikhlin S.G.* Chislennaya realizatsiya variatsionnykh metodov. M.: Nauka. 1966. 432 p.

**7.** *Polkovnichenko E.Yu., Sidorov M.V.. Shulgina S.S.* Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyy analiz techeniy vyazkoy neszhimayemoy zhidkosti v oblastyakh s podvizhnoy granitsey. Visnik Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Seriya: fiziko-matematichni nauki. 2014. № 1. P. 128-139.

**8.** *Rvachev V.L.* Teoriya R-funktsiy i nekotoryye eye prilozheniya. K.: Nauk. dumka. 1982. 552 p.

**9.** *Rouch P.* Vychislitelnaya gidrodinamika. M.: Mir. 1980. 616 p.

**10.** *Sidorov M.V.* O postroyenii struktur resheniy zadachi Stoksa. Radioelektronika i informatika. 2002. №3 (20). P. 39-42.

**11.** *Sidorov M.V.* Priblizhennyy metod rascheta mnogosvyaznykh vyazkikh techeniy. Radioelektronika i informatika. 2003. № 1 (22). P. 42-44.

**12.** *Tevyashev A.D., Gibkina N.V., Sidorov M.V.* Ob odnom podkhode k matematicheskomu modelirovaniyu ploskikh statsionarnykh techeniy vyazkoy neszhimayemoy zhidkosti v konechnykh odnosvyaznykh oblastyakh. Radioelektronika i informatika. 2007. № 2 (37). P. 50-57.

**13.** *Donea J., Huerta A.* Finite Element Methods for flow Problems. London: Wiley, 2003. 350 p.

**14.** *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Vol. 3: Fluid Dynamics. Oxford: BH, 2000. 334 p.

Надійшла до редколегії 13.11.2018

**Рецензент:** д-р фіз.-мат. наук, проф. Литвин О.М.

**Полковниченко Єгор Юрійович**, аспірант кафедри прикладної математики ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельні методи, метод R-функцій. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: eoxa77@gmail.com.

**Polkovnychenko Yehor Yurievich**, postgraduate student of the Applied Mathematics Department, Kharkov National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, numerical analysis, R-function's theory and its applications. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057) 7021436. E-mail: eoxa77@gmail.com.