СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.85

ФУНКЦИОНАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОЖЕСТВ ЕВКЛИДОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

ПИЧУГИНА О.С.

Решается проблема построения математической модели задач комбинаторной оптимизации в терминах непрерывных переменных для общих множеств евклидовых конфигураций перестановок и размещений векторов и их отдельных подклассов. Инструментом математического моделирования выбирается метод непрерывных функциональных представлений образов евклидовых комбинаторных множеств, представляющих собой множества комбинаторных конфигураций, в арифметическое евклидово пространство.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, дискретная оптимизация, евклидово комбинаторное множество, евклидова комбинаторная конфигурация, непрерывное функциональное представление.

Key words: combinatorial optimization, discrete optimization, Euclidean combinatorial set, Euclidean combinatorial configuration, continuous functional representation.

Введение

Задачи комбинаторной оптимизации охватывают широкий класс проблем теоретической и практической областей [1-7]. Среди них выделяются задачи евклидовой комбинаторной оптимизации [8, 9], в которых объекты комбинаторной природы отображаются в арифметическое евклидово пространство. Областью их допустимых решений является конечное множество, которое, не ограничивая общности, можно считать множеством вершин своей выпуклой оболочки. Это обуславливает возможность применения теории выпуклых продолжений к их решению [10-12]. Сравнительно новое направление в теории евклидовой комбинаторной оптимизации связано с построением непрерывных функциональных представлений дискретных множеств [13-21], позволяющих предложить новые непрерывные формулировки и релаксации дискретных задач. Перспективное направление в теории непрерывных функциональных представлений связано с понятием множества евклидовых комбинаторных конфигураций [22, 23]. Данная статья развивает именно это направление и посвящена построению непрерывных функциональных представлений множеств евклидовых комбинаторных конфигураций перестановок и размещений.

1. Евклидовы комбинаторные конфигурации

К. Берж [24] ввел определение конфигурации как отображение некоторого множества A в конечное абстрактное множество B заданной структуры:

$$\chi : A \to B \qquad (1)$$

при выполнении некоторого набора ограничений Ω. Здесь A – исходное множество элементов произвольной природы, а

$$B = \{b_1, ..., b_k\} - \qquad (2)$$

абстрактное результирующее множество.

Хоть формально Берж не накладывает ограничений на мощность множества A, но фактически ограничивается рассмотрением конечных исходных множеств, т.е. конфигурациями вида (1), где

$$A = \{a_1, ..., a_n\}, \qquad (3)$$

B имеет вид (2). Произвольную конфигурацию можно представить в виде:

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & ... & a_n \\ b_{j_1} & ... & b_{j_n} \end{pmatrix} = b_{j_1} b_{j_2} ... b_{j_n}, \qquad (4)$$

при этом структурирование результирующего множества будем понимать так, что конкретной конфигурацией как результатом отображения (1) является не образ множества A, а упорядоченная последовательность, т.е. кортеж, элементов этого образа, для которой мы будем использовать запись $\pi = \left[b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{j_n} \right]$.

При этом, учитывая существование биекции между множеством A и множеством $J_n = \{1, ..., n\}$ номеров его элементов (далее нумерующего множества), от отображения (1) можно перейти к следующему отображению

$$\psi : J_n \to B, \qquad (5)$$

оставляя результат отображения неизменным:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ b_{j_1} & \dots & b_{j_n} \end{pmatrix} = \left[b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{j_n} \right]. \qquad (6)$$

При этом элементы нумерующего множества понимаются как позиции элементов результирующего множества в конфигурации.

В этом контексте конфигурации, называемые, как правило, комбинаторными, исследуются в работах [25-28]. При этом под структурированием множества B подразумевается его строгое упорядочивание:

$$b_j \prec b_{j+1},\ j \in J_{k-1}. \qquad (7)$$

Заметим, что после перехода от отображения (1) к (5) произвольную конфигурацию можно представить триадой

$$(\psi, B, \Omega). \qquad (8)$$

В работах [26,29,30] было отмечено, что условие (7) может быть снято без потери сущности понятия комбинаторной конфигурации и осуществлено его обобщение на случай счетности множества B. При этом для триады (8) было предложено применять понятие «комбинаторный объект». Возвращаясь к исходному понятию (1) конфигурации в смысле Бержа, можно сказать, что если выполнено условие (2), π вида (4) или (6) представляет комбинаторную конфигурацию, если же $B=\{b_1,...,b_k,...\}$, то это комбинаторный объект.

2. Постановка задачи

Сформулируем задачу комбинаторной оптимизации в следующей постановке [26,29,30].

Пусть Π – конечное/локально-конечное пространство, элементами которого являются комбинаторные конфигурации/объекты вида (8) и на котором задан функционал $\xi:\Pi\rightarrow R^1$. Требуется найти:

$$\pi^* = \arg\min_{\pi\in\Pi'\subseteq\Pi} \xi(\pi), \tag{9}$$

где $\Pi'\subseteq\Pi$ – множество допустимых решений. Заметим, что в первом случае (9) представляет собой оптимизационную задачу на комбинаторных конфигурациях, во втором – на комбинаторных объектах.

Если Π – это множество всевозможных комбинаторных конфигураций/объектов вида (5) при заданных ограничениях Ω на вид отображения ψ, то множество Π' допустимых комбинаторных конфигураций/объектов выделяется из множества Π всех таких конфигураций/объектов с помощью некоторой системы ограничений

$$\Omega':\ q_i(\pi)\le 0,\ i\in J_p, \tag{10}$$

которая предполагается известной. Таким образом, задача (9) может быть представлена в виде: найти

$$\pi^* = \arg\min \xi(\pi) \tag{11}$$

при ограничениях (10) и $\pi\in\Pi$.

Ограничимся классом задач вида (9) на комбинаторных конфигурациях и в которых множество (2) представляет собой совокупность векторов одинаковой размерности:

$$b_j\in R^m,\ j\in J_k. \tag{12}$$

В таком случае конфигурация π представляет собой упорядоченную последовательность векторов:

$$\pi=\left[\begin{pmatrix} b_{1,j_1}\\ \dots\\ b_{m,j_1}\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix} b_{1,j_n}\\ \dots\\ b_{m,j_n}\end{pmatrix}\right]. \tag{13}$$

Таким образом, среди задач вида (9) мы выделили класс задач комбинаторной оптимизации, в которых B представляет собой множество числовых векторов. Например, это возможно в случае, если каждый объект характеризуется конечным числом числовых характеристик, участвующих в задаче оптимизации, а сами эти характеристики принимают не более чем счетное число значений. Заметим также, что всегда можно предполагать, что число характеристик объектов одинаковое, а недостающие значения характеристик можно дополнить нулями.

3. Изложение основного материала

3.1.Эквивалентные формулировки задачи (11)

Тот факт, что результирующее множество состоит из векторов вида (12), позволяет построить две эквивалентные формулировки исходной задачи. Приведем их.

Перейдя от рассмотрения упорядоченных последовательностей векторов (13) к матрицам, составленным из них, задача (9) может быть эквивалентно переформулирована следующим образом:

$$X^* = \arg\min_{X\in D'\subseteq D} F(X), \tag{14}$$

где X – матрица порядка $m\times n$, составленная из координат векторов конфигураций вида (13):

$$X=\left(b_{i,j_l}\right)_{i\in J_m,\ l\in J_n}, \tag{15}$$

D, D' - образы множеств комбинаторных конфигураций Π, Π' в множестве матриц порядка $m\times n$.

Еще одну эквивалентную формулировку задачи (9) построим, поставив каждой конфигурации π во взаимно-однозначное соответствие вектор

$$x=(x_1,...,x_N)\in R^N,\ N=m\cdot n, \tag{16}$$

например, по одному из правил:

$$x_{(i-1)n+s}=b_{ij_s},\ i\in J_m, s\in J_k, \tag{17}$$

$$x_{i+(s-1)m}=b_{ij_s},\ i\in J_m, s\in J_k, \tag{18}$$

т.е. осуществим отображение φ такое, что

$$x=\varphi(\pi),\ \pi=\varphi^{-1}(x). \tag{19}$$

Далее число N будем называть размерностью евклидовой комбинаторной конфигурации. Она определяет размерность пространства, в которой решается задача евклидовой комбинаторной оптимизации.

Итак, вектор (16) представляет собой образ комбинаторной конфигурации в евклидовом пространстве R^N при отображении φ, называемый евклидовой комбинаторной конфигурацией или e-конфигурацией [22]. Учитывая (8), она представима в виде четверки:

$$(\varphi, \psi, B, \Omega). \qquad (20)$$

Совокупность всех евклидовых комбинаторных конфигураций вида (19) представляет собой образ E комбинаторного множества Π в евклидовом пространстве R^N, для которого, учитывая (19), справедливо:

$$E = \varphi(\Pi),\ \Pi = \varphi^{-1}(E). \qquad (21)$$

Множества, для которых существует такое отображение φ, названы евклидовыми комбинаторными множествами или е-множествами [31]. Их выделяют из числа других комбинаторных множеств, поскольку возможность рассмотрения вместо них множеств точек арифметического евклидова пространства открывает широкие перспективы исследования алгебро-топологических и топологометрических свойств этих образов в евклидовом пространстве и дальнейшего перенесения этих специфических свойств на исходные евклидовые комбинаторные множества. Группа методов оптимизации на евклидовых комбинаторных множествах с помощью их отображения в евклидово пространство объединена в общий класс методов евклидовой комбинаторной оптимизации, а сами задачи на образах евклидовых комбинаторных множествах были названы задачами евклидовой комбинаторной оптимизации [8, 9].

Вернемся к рассмотрению задачи (9). Поскольку Π – евклидово комбинаторное множество, а E - его образ в R^N, задача (9) эквивалентна следующей задаче евклидовой комбинаторной оптимизации [22, 23]:

$$x^* = \arg \min_{x \in E' \subseteq E} f(x), \qquad (22)$$

где $E' = \varphi(\Pi')$ – образ множества Π' в R^N.

Заметим, что из всего класса задач евклидовой комбинаторной оптимизации мы выделили подкласс, в котором отображаемое множество – это множество комбинаторных конфигураций. Множества евклидовых комбинаторных конфигураций, получаемые в результате их погружения в евклидово пространство и называемые также C - множествами [22], выделяются в отдельный класс, так как они являются образами не просто евклидовых комбинаторных множеств, а множеств комбинаторных конфигураций, которые, как мы видели по построению, есть евклидовыми комбинаторными. Соответственно их свойства отражают тот факт, что они получены в результате серии отображений конечного множества в арифметическое евклидово пространство. А это, в свою очередь, определяет специфику задач евклидовой комбинаторной оптимизации на C -множествах и подходов к их решению, о чем будет сказано ниже.

3.2. Функциональные представления C -множеств

Заметим, что координаты векторов (12) могут повторяться, поэтому совокупность

$$B' = \{b_{ij}\}_{i \in J_m, j \in J_k} \qquad (23)$$

образует, вообще говоря, мультимножество. Из него мы выделим основу $S(B')$ и первичную спецификацию $[C]$, т.е. множество различных элементов B' и вектор их кратностей:

$$C = \{e_i\}_{i \in J_K} = S(B'),\ e_i < e_{i+1},\ i \in J_{K-1}, \qquad (24)$$

$$[C] = (N_i)_{i \in J_K},\ N_1 + \ldots + N_K = N.$$

Теперь евклидову комбинаторную конфигурацию (16) можно представить многозначным отображением множества A в множество C:

$$x = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ \xi(a_1) & \ldots & \xi(a_n) \end{pmatrix} = [\xi(a_1), \ldots, \xi(a_n)] =$$

$$= \left[\{b_{ij_1}\}_{i \in J_m}, \ldots, \{b_{ij_n}\}_{i \in J_m}\right],$$

где $\xi(a_s)$ – многозначное отображение элемента a_s в мультимножество $\{b_{ij_s}\}_{i \in J_m}$, $s \in J_n$. При этом результат, например, отображения (17) понимается как вектор x такой, что первые m его координат совпадают с координатами вектора b_{j_1}, следующие m – с координатами вектора b_{j_2} и т.д., а результатом отображения (18) будет вектор x, у которого первые n координат соответствуют первым координатам векторов $b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}$, следующие n – вторым координатам этих векторов.

Перейдем к рассмотрению задачи (22). Ее отличительной особенностью от задачи (9) является то, что она сформулирована как задача дискретного программирования, соответственно к ее решению может быть применен весь аппарат дискретной оптимизации [1-9]. Так, в различных схемах ветвления, широко применяемых в этой области, можно использовать такую особенность C -множества E, что координаты любой евклидовой комбинаторной конфигурации $x \in E$ принимают значения исключительно из множества C вида (24), которое называется образующим множеством для C :

$$x_i \in C,\ i \in J_N. \qquad (25)$$

Соответственно евклидовы комбинаторные конфигурации будут элементами ограниченной дискретной решетки C^N – $\forall x \in E$, $x \in C^N$, а следовательно, и все множество E будет подмножеством этой решетки:

$$E \subseteq C^N \subset R^N.$$

Еще один мощный инструмент, применяемый при решении дискретных задач, это нелинейное программирование [32,33]. В этом направлении можно условно выделить две группы методов, первая из которых связана с построением непрерывных формулировок дискретных задач, вторая – с различными непрерывными релаксациями [33-35]. Это очень перспективное направление комбинаторной оптимизации, поскольку многие задачи этого класса могут быть сформулированы на вершинно-расположенных множествах [10], соответственно, как целевая функция, так и функциональные ограничения могут считаться выпуклыми [36], следовательно, позволяют рассматривать выпуклые релаксации исходной задачи. Обе указанные группы методов связаны с поиском аналитических формулировок условия $x \in E$ принадлежности допустимого решения дискретному множеству.

Заметим, что для осуществления трансформации задачи (9) в задачу евклидовой комбинаторной оптимизации (22) необходимо построить функцию $f : E \to R^1$ такую, что $f(x) = \xi(\varphi^{-1}(x))$ для всех $x \in E$. Иначе говоря, представить цель оптимизации в терминах координат вектора x, что само по себе является непростой задачей. То же самое относится и к формализации ограничений Ω' в терминах евклидовых комбинаторных конфигураций.

Например, в хорошо известной задаче коммивояжёра для отображения множества городов A, через которые строится цикл, в арифметическое евклидово пространство достаточно взять в качестве множества B нумерующее множество и $m = 1$. В таком случае как конфигурация (13), так и евклидовая комбинаторная конфигурация (16) будет указывать последовательность обхода городов, т.е. задавать такой цикл. Однако при выборе такого отображения ψ не удается сформулировать целевую функцию $f(x)$. Если же, вместо J_n, в качестве B выбрать базис единичных n-мерных векторов, то (14) будет представлять собой известную постановку Данцига задачи коммивояжёра в виде задачи булевой оптимизации, от которой легко перейти к задаче (22) на векторах R^{n^2}, иными словами осуществить переход к постановке задачи коммивояжёра как задачи евклидовой комбинаторной оптимизации. В терминах евклидовых комбинаторных конфигураций это означает, что $m = n$, соответственно задача (22) решается на множестве евклидовых комбинаторных конфигураций размерности n^2. Заметим также, что, поскольку $m = n$, то в данном случае (14) представляет собой задачу оптимизации на множестве комбинаторных объектов второго порядка [29]. Но, вообще говоря, задача оптимизации на комбинаторных объектах второго порядка является частным случаем задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях. При этом данное обобщение касается возможности рассмотрения матриц разных порядков.

Основной момент, который следует прояснить при переходе от задачи (9) к задаче (22), – это формулировка целевой функции и ограничений, задающих множество допустимых решений, в терминах координат евклидовых комбинаторных конфигураций. Следует выделить три группы ограничений, первые две из которых задают множество Π, а последняя выделяет из него подмножество Π':

- **Группа 1** – ограничения Ω, изначально формулируемые для комбинаторных конфигураций/объектов (6) в терминах отображения ψ.
- **Группа 2** – ограничения, которые накладываются на координаты вектора x при переходе от упорядоченной последовательности векторов (13) к точке x. Так, при выборе отображения в форме (18) они предусматривают, чтобы для произвольного $s \in J_n$ подвектор $x^s = \left(x_{i+(s-1)m}\right)_{i \in J_m}$ в точности совпадал с некоторым вектором из множества (12), а в целом, чтобы количество таких совпадений не превышало кратностей, предусмотренных отображением ψ.
- **Группа 3** – это дополнительные ограничения Ω', которые также по условию формулируются в терминах комбинаторных конфигураций (6).

С каждой из этих групп ограничений свяжем **задачи (1)-(3)** соответственно. Решение задачи (3) запишем, исходя из (10) и с учётом (19):

$$h_i(x) = q_i\left(\varphi^{-1}(x)\right) \le 0,\ i \in J_p$$

и будем далее предполагать, что имеем дело с задачей (22) в форме:

$$f(x) \to \min,\ x \in E', \tag{26}$$

где множество E' задается системой ограничений:

$$x \in E, \tag{27}$$

$$h_i(x) \le 0,\ i \in J_p, \tag{28}$$

а функции $f(x), h_i(x)$, $i \in J_p$ определены на E.

Нашей целью является решение задач (1), (2), т.е. формализация дискретных ограничений (27).

Напомним, что ограничения (27) называют прямыми, а ограничения (28) – функциональными. Таким образом, нашей задачей является построение прямых ограничений задачи оптимизации на множестве евклидовых комбинаторных конфигураций, исходя из вида элементов четверки (20) - вида отображений φ, ψ, ограничений Ω и результирующего множества B.

Итак, перейдем непосредственно к формализации прямых ограничений, предназначенных вырезать из решетки C^N в точности множество евклидовых комбинаторных конфигураций E. Заметим, что решение задачи (1) напрямую зависит от типа евклидового комбинаторного множества Π и не зависит от природы множества B.

Так, если $\Omega = \varnothing$, т.е. рассматриваются всевозможные отображения J_n в B, то Π - е-множество размещений с неограниченными повторениями из мультимножества B^n (далее **Случай 1**), обозначаемое $\bar{P}_k^n\left(B^k\right)$. Если $k = n$ и

$$\Omega = \left\{\text{отображение } \psi \text{ - биективное}\right\},$$

то Π будет е-множеством перестановок без повторений из множества B (далее **Случай 2**), которое обозначается $P_n(B)$. Наконец, если $k > n$ и

$$\Omega = \left\{\text{отображение } \psi \text{ - инъективное}\right\},$$

Π представляет собой е-множество k-размещений без повторений из B (далее **Случай 3**), которое обозначается $P_k^n(B)$, и т.п. Конкретный тип элементов B можно указать в названии е-множества. Так, если B - числовое множество (то же самое B - множество 1-векторов), то, к примеру, в Случае 1 мы будем иметь числовое е-множество размещений с неограниченными повторениями; если B имеет вид (12) и при этом $m > 1$, то в Случае 2 Π является е-множеством перестановок векторов без повторений из B и т. д.

Далее рассмотрим **Случай 4**, обобщающий Случай 2, при котором $k \le n$, а ограничения Ω сформулированы следующим образом:

$$\Omega = \left\{\forall \pi, \pi' \in \Pi: \ \{\pi\} = \{\pi'\}\right\}, \tag{29}$$

где $\pi \in \Pi$ $\{\pi\} = \left\{b_{j_1}, ..., b_{j_n}\right\}$. Такое множество будем называть общим е-множеством перестановок векторов и использовать для него обозначение $P_{nk}(\mathbf{G})$. Оно индуцируется мультимножеством из векторов:

$$\mathbf{G} = \left\{b_1^{n_1}, ..., b_k^{n_k}\right\}: \ |\mathbf{G}| = n, \tag{30}$$

при этом $\forall \pi \in \Pi$ $\{\pi\} = \mathbf{G}$. Наконец, рассмотрим обобщение Случаев 1, 3 (далее **Случай 5**), для которого ограничения Ω имеют вид:

$$\Omega = \left\{\text{индуцрующее } \Pi \text{ множество } \mathbf{G}: \ |\mathbf{G}| > n\right\}, \tag{31}$$

а именно

$$\begin{gathered} \mathbf{G} = \left\{b_1^{\eta_1}, ..., b_k^{\eta_k}\right\}: \ |\mathbf{G}| = \eta > n, \\ 1 \le \eta_i \le \eta - k + 1, \ i \in J_k. \end{gathered} \tag{32}$$

Условие (31) можно также сформулировать в виде:

$$\Omega = \left\{\forall \pi \in \Pi \ \{\pi\} \subset \mathbf{G}; \ \exists \pi, \pi' \in \Pi: \ \{\pi\} \ne \{\pi'\}\right\}. \tag{33}$$

Образованное множество будем называть общим е-множеством размещений векторов, обозначив его $P_{\eta k}^n(\mathbf{G})$.

Образы общих е-множеств перестановок и размещений будут общие множества евклидовых конфигураций перестановок $E_{\eta k}(\mathbf{G}) = \varphi\left(P_{\eta k}(\mathbf{G})\right)$ и размещений $E_{\eta k}^n(\mathbf{G}) = \varphi\left(P_{\eta k}^n(\mathbf{G})\right)$, называемые также общими C-множествами перестановок и размещений соответственно. Поскольку как было показано, остальные приведенные е-множества являются частными случаями этих двух, непрерывные функциональные представления построим для $E_{nk}(\mathbf{G})$, $E_{\eta k}^n(\mathbf{G})$. Также предложим подходы к построения непрерывных представлений отдельных классов этих множеств.

Перейдем непосредственно к процессу построения.

1) Пусть для начала $m = 1$. Этот случай касается числового множества комбинаторных конфигураций, при котором $N = n$, $K = k$, ограничения группы 2 отсутствуют, а отображение φ сводится к простому рассмотрению комбинаторной конфигурации как точки арифметического евклидова пространства с координатами из результирующего множества:

$$\forall \pi \in \Pi \ b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{j_n} \in R,$$

$$\pi = \left[b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{j_n}\right] \xrightarrow{\varphi} x = \left(b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{j_n}\right) \in R^n.$$

В этом случае задачу (2) решать нет необходимости. Поэтому для достижения поставленной цели достаточно привести варианты решения задачи (1) для Случаев 1-5:

• Случай 1. Поскольку в этой ситуации $E = C^n$, аналитически множество E можно задать так:

$$\prod_{j=1}^{k}\left(x_i - e_j\right) = 0, \ i \in J_n. \tag{34}$$

• Случай 2. Тут для выделения множества Π из решетки C^n нужно вырезать векторы с различными координатами, что, с учетом $k = n$, можно представить в виде:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(x_i - e_j\right) = 0,\ i \in J_n, \quad (35)$$

$$\left|x_i - x_j\right| \geq \Delta,\ 1 \leq i < j \leq n, \quad (36)$$

где $\Delta = \min_{i \in J_{n-1}}\left(e_{i+1} - e_i\right)$.

Еще два способа задать Π приведены в [14]:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j = \sum_{i=1}^{n} e_i^j,\ j \in J_n; \quad (37)$$

$$\sum_{|\omega|=j}\prod_{i \in \omega \subseteq J_n} x_i = \sum_{|\omega|=j}\prod_{i \in \omega \subseteq J_n} e_i,\ j \in J_n. \quad (38)$$

• Случай 3. Тут можно использовать обобщение функционального представления (35), (36) на случай $k > n$ вида (34):

$$\left|x_i - x_j\right| \geq \Delta,\ 1 \leq i < j \leq k,$$

где $\Delta = \min_{i \in J_{k-1}}\left(e_{i+1} - e_i\right)$.

• Случай 4 – мультимножества (23),(30) совпадают, соответственно, мультимножество $\mathbf{G}$ имеет вид:

$$\mathbf{G} = B' = \left\{e_1^{n_1}, \dots, e_k^{n_k}\right\} = \left\{g_i\right\}_{i \in J_n} : n_1 + \dots + n_k = n; \quad (39)$$
$$e_i < e_{i+1},\ i \in J_{k-1};\ g_i \leq g_{i+1},\ i \in J_{n-1}.$$

и является индуцирующим как для множества конфигураций Π, так и для множества е-конфигураций E. Для задания E справедливы обобщения формул (37), (38) [14] вида:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j = \sum_{i=1}^{k} n_i e_i^j,\ j \in J_n; \quad (40)$$
$$\sum_{|\omega|=j}\prod_{i \in \omega \subseteq J_n} x_i = \sum_{|\omega|=j}\prod_{i \in \omega \subseteq J_n} g_i,\ j \in J_n.$$

• Случай 5 – здесь будет справедливо строгое включение мультимножества (23) в индуцирующее мультимножество (32) для любой конфигурации $\pi \in \Pi$:

$$B' = \left\{e_1^{n_1}, \dots, e_k^{n_k}\right\} \subset \mathbf{G} = \left\{e_1^{\eta_1}, \dots, e_k^{\eta_k}\right\} = \left\{g_i\right\}_{i \in J_\eta}:$$
$$e_i < e_{i+1},\ i \in J_{k-1};\ g_i \leq g_{i+1},\ i \in J_{\eta-1}.$$

Здесь $\left(n_1, \dots, n_k\right)$ – вектор кратностей элементов $S(\mathbf{G})$ в конфигурации $\pi \in \Pi$, а соответственно и кратностей координат е-конфигурации $x = \varphi(\pi)$. Заметим, что каждая такая конфигурация принадлежит общему е-множеству конфигураций перестановок $\Pi(B') \subset \Pi$, индуцированному мультимножеством B' вида (23). Соответственно, для $E(B') = \varphi(\Pi(B')) \subset E = \varphi(\Pi)$ справедливо представление (40). Объединяя такие представления по всем $B' \subset \mathbf{G}$: $|B'| = n$, получаем представление всего общего C-множества размещений вида (40),

$$n_i \in J_{\eta_i}^0 = J_{\eta_i} \cup \{0\};\ \sum_{i=1}^{k} n_i = n. \quad (41)$$

Задав ограниченную решетку $C' = \bigotimes_{i=1}^{k} J_{\eta_i}^0$ аналитически с использованием, например, формулы (34), получим искомое непрерывное функциональное представление общего C-множества размещений вида (40):

$$\prod_{j=0}^{\eta_i}\left(n_i - j\right) = 0,\ i \in J_k,\ \sum_{i=1}^{k} n_i = n. \quad (42)$$

Поскольку в нем участвуют дополнительные переменные $n_1, \dots, n_k$, это представление сформировано в расширенном пространстве и, согласно терминологии [22], является расширенным функциональным представлением множества E.

2) Пусть теперь $m > 1$, т.е. C-множество E представляет образ е-множества Π, компонентами которого являются упорядоченные последовательности векторов. Представим способы аналитического задания C-множеств перестановок и размещений векторов. Для того чтобы сопоставить множеству Π множество евклидовых комбинаторных конфигураций E, зададим биективное отображение γ между элементами результирующего множества B и множеством E действительных чисел:

$$E = \left\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\right\},$$

такое, что:

$$\varepsilon_j = \gamma\left(b_j\right),\ b_j = \gamma^{-1}\left(\varepsilon_j\right),\ j \in J_k.$$

При этом можно всегда считать, что элементы множества B занумерованы таким образом, что элементы E упорядочены по возрастанию – $\varepsilon_i < \varepsilon_{i+1},\ i \in J_{k-1}$.

Для того чтобы задать γ, достаточно найти функцию m переменных, принимающих различные значения при подстановке координат k векторов (12). Значительно труднее построить обратную функцию γ^{-1}, которая по одному числу восстановила бы весь вектор, если при этом задача записана в терминах координат евклидовых комбинаторных конфигураций и векторов (12). Для решения этой проблемы мы предлагаем построить не одну, а k функций, которые бы позволили по значениям $\varepsilon_i,\ i \in J_k$ восстанавливать все m координат векторов (12). А именно, построим функции

$$\nu_i : b_{ij} = \nu_i\left(\varepsilon_j\right),\ j \in J_k,\ i \in J_m \qquad (43)$$

в виде интерполяционных полиномов степени $k-1$, т.е.

$$\nu_i\left(\varepsilon\right) = P_{k-1}^{i}\left(\varepsilon\right),\ i \in J_m.$$

Теперь запишем искомое непрерывное функциональное представление C-множества перестановок векторов на основе представления (40). Система:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^s = \sum_{i=1}^{k} n_i \varepsilon_i^s,\ s \in J_n \qquad (44)$$

будет задавать общее C-множество перестановок, индуцированное мультимножеством

$$G = \left\{\varepsilon_1^{n_1}, \ldots, \varepsilon_k^{n_k}\right\}.$$

Тогда, объединяя (43), (44), получаем, что система уравнений (43), (44)

$$x_{ij} = \nu_i\left(y_j\right),\ j \in J_k,\ i \in J_m \qquad (45)$$

задает искомое непрерывное функциональное представление множества $E_{nk}\left(\mathbf{G}\right)$. Поскольку в нем участвуют дополнительные переменные $y_j,\ j \in J_k$, это представление является расширенным функциональным представлением множества евклидовых комбинаторных конфигураций перестановок векторов.

Объединяя теперь целевую функцию $f(x) \to \min$ с ограничениями (28), (43)-(45), получаем искомую модель в форме задачи дискретной оптимизации. Следует отметить, что рассмотренное C-множество перестановок векторов является подмножеством общего C-множества перестановок, индуцированного мультимножеством (23). Последнее множество является вершинно-расположенным согласно [8], соответственно и первое множество вершинно-расположено как его подмножество. А это позволяет говорить о существовании выпуклых продолжений целевой функции и функций ограничений $h_i\left(x\right),\ i \in J_p$ и возможности перехода к их рассмотрению при решении исходной задачи.

Такой же подход может быть применен к формализации задач на C-множестве размещений векторов $E_{\eta k}^{n}\left(\mathbf{G}\right)$. А именно, добавив к системе ограничений (43)-(45) условие (41), мы объединим все подмножества $E_{\eta k}^{n}\left(\mathbf{G}\right)$, являющиеся общими C-множествами n-перестановок m-мерных векторов. Перейдя от (41) к форме (42), получим, что искомое непрерывное функциональное представление множества (42) задается системой уравнений (42)-(45).

3.3. Анализ полученных результатов

Сделаем несколько замечаний по поводу представленных результатов.

1. Приложением предложенных аналитических представлений множеств евклидовой комбинаторной оптимизации могут быть различные задачи оптимального проектирования и геометрического дизайна [37-40]. В частности, они демонстрируют возможности применения метода искусственного расширения пространства [37] на задачи размещения новых классов.

2. Деление ограничений задачи (22) на прямые и функциональные достаточно условно после того, как задача поиска функционального представления множества E решена, поскольку теперь все ограничения имеют явный вид. Считая их все функциональными, мы приходим просто к непрерывной задаче на условный экстремум, перенося их все в прямые – задачу оптимизации на множестве E' евклидовых комбинаторных конфигураций/объектов без дополнительных ограничений. В первом случае в разработке методов нас будут интересовать, в первую очередь, поведение функций на E, во втором – свойства самого множества E. Выбирая же что-то промежуточное – комбинацию прямых и функциональных ограничений - можно сочетать эти два аспекта евклидовой комбинаторной оптимизации.

3. Мы описали связь оптимизационных задач на комбинаторных конфигурациях с задачами евклидовой комбинаторной оптимизации на множествах евклидовых комбинаторных конфигурациях для случая, когда результирующее множество состоит из векторов одной размерности. Здесь следует отметить, что для произвольных тензоров – таблиц, матриц, многомерных таблиц и матриц этот подход также применим после их перевода, подобно (17), (18), в векторы.

Выводы

Метод функциональных представлений применен для построения аналитических представлений общих множеств евклидовых комбинаторных конфигураций перестановок и размещений, а также их специальных классов. Их отличительной особенностью является комбинирование свойств этих дискретных множеств в арифметическом евклидовом пространстве и свойств отображений, с помощью которых они формируются. Результаты могут быть применены в различных практических областях, связанных с оптимальным планированием и геометрическим проектированием.

Литература: **1.** *Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981. 344 с. **2.** *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1984. 512 с. **3.** *Сергиенко И.В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. *К.: Наук. думка, 2003. 261с.* **4.** *Баранов В. И., Стечкин Б. С.* Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. *М.: Физматлит, 2004. 240 с.* **5.** *Korte B., Vygen J.* Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Heidelberg, New York: Springer, 2012. 660 p. **6.** *Pardalos P.M., Du D-Z., Graham R.L.* Handbook of combinatorial optimization. N.Y.: Springer, 2013. 3409 p. **7.** *Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю.* Прикладні методи комбінаторної оптимізації: навчальний посібник. К: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. 142 с. **8.** *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К. : Наук. думка, 1986. 268 с. **9.** *Стоян Ю. Г., Ємець О. О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К. : Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. 188 с. **10.** *Яковлев С. В.* Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1994. Т. 34, № 7. С. 1112-1119. **11.** *Yakovlev S. V.* Convex extensions in combinatorial optimization and their applications // in Optimization Methods and Applications - In Honor of Ivan V. Sergienko’s 80th Birthday. N. Y.: Springer, 2017, P. 501–517. **12.** *Яковлев С. В.* Теория выпуклых продолжений в задачах комбинаторной оптимизации // Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. науки, 2017. № 8. С. 20–26. **13.** *Яковлев С. В., Пичугина О. С.* Свойства задач комбинаторной оптимизации на полиэдрально-сферических множествах // Кибернетика и системный анализ. 2018. № 1. С. 111-124. **14.** *Пичугина О. С., Яковлев С. В.* Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества // Восточно-Европейский журнал передовых технологий, 2016. Vol. 79, No. 4. С. 27-38. **15.** *Pichugina O., Yakovlev S.* Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization // Cybernetics and Systems Analysis, 2016. Vol. 52, No. 6. P. 921-930. **16.** *Pichugina O., Yakovlev S.* Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications // J. Coupled Syst. Multiscale Dyn., 2016. Vol. 4, No.2 . P. 129-152. **17.** *Pichugina O., Yakovlev S.* Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems // In: Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering, Edited J. Bélair et al. Switzerland: Springer, 2016. P. 689-700. **18.** *Пичугина О. С., Яковлев С. В.* Выпуклые продолжения для класса квадратичных задач на перестановочных матрицах // Компьютерная математика, 2016. № 1. С. 143–154. **19.** *Pichugina O., Yakovlev S.* O. Continuous representation techniques in combinatorial optimization // IOSR Journal of Mathematics, 2017. Vol. 13, No. 2, Ver.V. P. 12-25. **20.** *Pichugina O., Yakovlev S.* Optimization on Polyhedral-Spherical Sets: Theory and Applications // In 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engeneering (UKRCON) , 2017. P. 1167-1174. **21.** *Пичугина О. С.* Оптимизация на общем множестве перестановок со знаком // Сист. досл. та інф. техн., 2017. № 4. С. 74–96. **22.** *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Пичугина О. С.* Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография, 2017. Х.: Константа, 2017. 404 с. **23.** *Яковлев С. В., Пичугина О. С.* Задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях и их свойства // Пит. прикл. матем. і матем. модел., 2017. Вип. 17. С. 278–263. **24.** *Berge C.* Principes de combinatoire, 1968. Paris: Dunod. 146 p. **25.** *Сачков В.Н.* Комбинаторные методы дискретной математики, 1975. М.: Наука. 319 с. **26.** *Гуляницкий Л.Ф., Сергиенко И.В.* Метаэвристический метод деформированного многогранника в комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 2007. № 6. С. 70–79. **27.** *Стоян Ю. Г., Гребенник И. В.* Описание классов комбинаторных конфигураций на основе отображений // Доклады НАН Украины, 2008. №10. С. 28 – 31. **28.** *Донець Г.П., Колєчкіна Л.М.* Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях, 2011. Полтава: ПУЕТ. 328 с. **29.** *Гуляницкий Л.Ф.* До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації // Теорія оптимальних рішень. 2008. № 7. С. 45–49. **30.** *Сергиенко И.В., Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И.* Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 2009. № 5. С. 71-83. **31.** *Стоян Ю.Г.* Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств: Препринт 85 АН УССР. Х.: Институт проблем машиностр, 1980. 22 с. **32.** *Bertsekas D.P.* Nonlinear Programming. Belmont: Athena Scientific, 1995. 378 p. **33.** *Pardalos P.M. (Eds).* Approximation and Complexity in Numerical Optimization: Continuous and Discrete Problems. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. 581 p. **34.** *Hillier F. S., Appa G., Pitsoulis L., Williams H. P., Pardalos P. M., Prokopyev O. A., Busygin S.* Continuous Approaches for Solving Discrete Optimization Problems // in Handbook on Modelling for Discrete Optimization. New York : Springer, 2006. P. 1-39. **35.** *Kochenberger G., Hao J.-K., Glover F., Lewis M., Lu Z., Wang H., and Wang Y.* The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey // Journal of Combinatorial Optimization. 2014. No 1. P. 58-81. **36.** *Пичугина О. С., Яковлев С. В.* Методы глобальной оптимизации на перестановочном многограннике в комбинаторных задачах на вершинно-расположенных множествах // Мат. та комп. модел. Сер. Фіз.-мат. науки, 2017. Т. 1, № 15. С. 152–158. **37.** *Yakovlev S. V.* The Method of Artificial Space Dilation in Problems of Optimal Packing of Geometric Objects // Cybern. Syst. Anal., 2017. Vol. 53, No. 5. P. 725–731. **38.** *Яковлев С. В.* О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов // Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. науки. 2017. № 9. С. 26–32. **39.** *Пічугіна О.С., Колєчкіна Л.М.* Двокритеріальна комбінаторна модель оптимізації телекомунікаційних мереж // Математичні машини і системи. 2017. № 4. С. 129 – 144. **40.** *Pichugina O.* Placement problems in chip design: Modeling and optimization // In 2017 4th International Scientific-Practical

Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC&ST). 2017. P. 465–473.
Transliterated bibliography:
1. *Emelichev V. A., Kovalev M. M., Kravcov M. K.* Mnogogranniki, grafy, optimizacija. M.: Nauka, 1981. 344 s.
2. *Papadimitriu H., Stajglic K.* Kombinatornaja optimizacija. Algoritmy i slozhnost'. M.: Mir, 1984. 512 s.
3. *Sergienko I.V., Shilo V.P.* Zadachi diskretnoj optimizacii: problemy, metody reshenija, issledovanija. K.: Nauk. dumka, 2003. 261s.
4. *Baranov V. I., Stechkin B. S.* Jekstremal'nye kombinatornye zadachi i ih prilozhenija. M.: Fizmatlit, 2004. 240 s.
5. *Korte B., Vygen J.* Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Heidelberg, New York: Springer, 2012. 660 p.
6. *Pardalos P.M., Du D-Z., Graham R.L.* Handbook of combinatorial optimization. N.Y.: Springer, 2013. 3409 p.
7. *Guljanyc'kyj L.F., Mulesa O.Ju.* Prykladni metody kombinatornoi' optymizacii'. K: Vydavnycho-poligrafichnyj centr "Kyi'vs'kyj universytet", 2016. 142 s.
8. *Stojan Ju.G., Jakovlev S.V.* Matematicheskie modeli i optimizacionnye metody geometricheskogo proektirovanija. K. : Nauk. dumka, 1986. 268 s.
9. *Stojan Ju. G., Jemec' O. O.* Teorija i metody evklidovoi' kombinatornoi' optymizacii'. K.: In-t systemn. doslidzh. osvity, 1993. 188 s.
10. *Jakovlev S. V.* Teorija vypuklyh prodolzhenij funkcij na vershinah vypuklyh mnogogrannikov // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, 1994. T. 34, № 7. S. 1112-1119.
11. *Yakovlev S. V.* Convex extensions in combinatorial optimization and their applications // in Optimization Methods and Applications - In Honor of Ivan V. Sergienko's 80th Birthday. N. Y.: Springer, 2017, P. 501–517.
12. *Jakovlev S.V.* Teorija vypuklyh prodolzhenij v zadachah kombinatornoj optimizacii // Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tehn. nauki, 2017. № 8. S. 20–26.
13. *Jakovlev S.V., Pichugina O.S.* Svojstva zadach kombinatornoj optimizacii na polijedral'no-sfericheskih mnozhestvah // Kibernetika i sistemnyj analiz, 2018. № 1. S. 111-124.
14. *Pichugina O.S., Jakovlev S.V.* Funkcional'no-analiticheskie predstavlenija obshhego perestanovochno-go mnozhestva // Vostochno-Evropejskij zhurnal peredvyh tehnologij, 2016. Vol. 79, No. 4. S. 27-38.
15. *Pichugina O., Yakovlev S.* Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization // Cybernetics and Systems Analysis, 2016. Vol. 52, No. 6. P. 921-930.
16. *Pichugina O., Yakovlev S.* Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications // J. Coupled Syst. Multiscale Dyn., 2016. Vol. 4, No.2 . P. 129-152.
17. *Pichugina O., Yakovlev S.* Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems // In: Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering, Edited J. Bélair et al. Switzerland: Springer, 2016. P. 689-700.
18. *Pichugina O. S., Jakovlev S. V.* Vypuklye prodolzhenija dlja klassa kvadratichnyh zadach na perestanovochnyh matricah // Komp'juternaja matematika, 2016. № 1. S. 143–154.
19. *Pichugina O., Yakovlev S.* O. Continuous representation techniques in combinatorial optimization // IOSR Journal of Mathematics, 2017. Vol. 13, No. 2, Ver. V. P. 12-25.
20. *Pichugina O., Yakovlev S.* Optimization on Polyhedral-Spherical Sets: Theory and Applications // In 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engeneering (UKRCON), 2017. P. 1167-1174.
21. *Pichugina O. S.* Optimizacija na obshhem mnozhestve perestanovok so znakom // Sist. dosl. ta inf. tehn., 2017. № 4. S. 74–96.
22. *Stojan Ju. G., Jakovlev S. V., Pichugina O. S.* Evklidovy kombinatornye konfiguracii: monografija, 2017. H.: Konstanta, 2017. 404 s.
23. *Jakovlev S. V., Pichugina O. S.* Zadachi optimizacii na evklidovyh kombinatornyh konfiguracijah i ih svojstva // Pit. prikl. matem. i matem. model., 2017. Vip. 17. S. 278–263.
24. *Berge C.* Principes de combinatoire, 1968. Paris: Dunod. 146 p.
25. *Sachkov V.N.* Kombinatornye metody diskretnoj matematiki, 1975. M.: Nauka. 319 s.
26. *Guljanickij L.F., Sergienko I.V.* Metajevristicheskij metod deformirovannogo mnogogrannika v kombinatornoj optimizacii // Kibernetika i sistemnyj analiz, 2007. № 6. S. 70–79.
27. *Stojan Ju. G., Grebennik I. V.* Opisanie klassov kombinatornyh konfiguracij na osnove otobrazhenij // Doklady NAN Ukrainy, 2008. №10. S. 28 – 31.
28. *Донець Г.П., Колєчкіна Л.М.* Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях, 2011. Полтава: ПУЕТ. 328 с.
29. Гуляницкий Л.Ф. До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації // Теорія оптимальних рішень, 2008. № 7. С. 45–49.
30. *Sergienko I.V., Guljanickij L.F., Sirenko S.I.* Klassifikacija prikladnyh metodov kombinatornoj optimizacii // Kibernetika i sistemnyj analiz, 2009. № 5. S. 71-83.
31. *Stojan Ju.G.* Nekotorye svojstva special'nyh kombinatornyh mnozhestv: Preprint 85 AN USSR. H.: Institut problem mashinostr, 1980. 22 s.
32. *Bertsekas D.P.* Nonlinear Programming. Belmont: Athena Scientific, 1995. 378 p.
33. *Pardalos P.M. (Eds)*. Approximation and Complexity in Numerical Optimization: Continuous and Discrete Problems. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. 581 p.
34. *Hillier F. S., Appa G., Pitsoulis L., Williams H. P., Pardalos P. M., Prokopyev O. A., Busygin S.* Continuous Approaches for Solving Discrete Optimization Problems // in Handbook on Modelling for Discrete Optimization. New York : Springer, 2006. P. 1-39.
35. *Kochenberger G., Hao J.-K., Glover F., Lewis M., Lu Z., Wang H., and Wang Y.* The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey // Journal of Combinatorial Optimization. 2014. No 1. P. 58-81.
36. *Pichugina O. S., Jakovlev S. V.* Metody global'noj optimizacii na perestanovochnom mnogogrannike v kombina-

tornyh zadachah na vershinno raspolozhennyh mnozhestvah // Mat. ta komp. model. Ser. fiz.-mat. nauki, 2017. T. 1, № 15. C. 152–158.
37. *Yakovlev S. V.* The Method of Artificial Space Dilation in Problems of Optimal Packing of Geometric Objects // Cybern. Syst. Anal., 2017. Vol. 53, No. 5. P. 725–731.
38. *Jakovlev S. V.* O kombinatornoj strukture zadach optimal'nogo razmeshhenija geometricheskih ob#ektov // Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tehn. nauki, 2017. № 9. S. 26–32.
39. *Pichugina O.S., Koljechkina L.M.* Dvokryterial'na kombinatorna model' optymizacii' telekomunikacijnyh merezh // Matematychni mashyny i systemy, 2017. № 4. C. 129 – 144.
40. *Pichugina O.* Placement problems in chip design: Modeling and optimization //Proc. Of the 4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC&ST). 2017. P. 465–473.

Поступила в редколлегию 18.01.2018
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Яковлев С.В.

Пичугина Оксана Сергеевна, канд. физ.-мат. наук, докторант кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: полиэдральная комбинаторика, евклидовая комбинаторная, нелинейная, параметрическая оптимизация, теория графов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки, 14, тел. (099)9598965.

Pichugina Oksana Sergeevna, PhD, post doc., Department of Applied Mathematics, Kharkov National University of Radioelectronics. Scientific interests: polyhedral combinatorics, Euclidean combinatorial, nonlinear, parametric optimization, graph theory. Address: Ukraine, 61166, Kharkov, Science, 14, tel. (099) 9598965.