УДК 517.927.4 : 517.988

КОНСТРУКТИВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

ВОРОНЕНКО М.Д., СИДОРОВ М.В.

Розглядаються нелінійні крайові задачі різних типів для звичайних диференціальних рівнянь. За допомогою функції Гріна розглядувані крайові задачі зводяться до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке досліджується методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах. При цьому будується послідовність двобічних наближень до єдиного додатного розв'язку відповідної крайової задачі.

Ключові слова: додатний розв'язок; нелінійне звичайне диференціальне рівняння; крайова задача; функція Гріна; гетеротонний оператор; двобічні наближення.

Key words: positive solution; semilinear ordinary differential equation; boundary problem; Green's function; heterotone operator; two-sided approach.

Вступ. Математичне моделювання високотемпературних процесів у хімії, фізиці плазми, теорії горіння [9] викликає необхідність розв'язання крайових задач для нелінійного звичайного диференціального рівняння вигляду

$$-\frac{d}{d}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=f(x,u)\,,\ x\in(0,\,L)\,. \qquad (1)$$

Зазвичай у прикладних задачах виконуються умови $p(x)\ge p_0>0$, $q(x)\ge 0$, $x\in[0,\,L]$ і ставиться задача знаходження додатного на $(0,L)$ розв'язку рівняння (1). Точні розв'язки крайових задач для рівняння (1) відомі лише у поодиноких випадках. Крім того, до певних складностей приводить вирішення питання про існування та єдиність розв'язку. У зв'язку з цим актуальною науковою проблемою є розробка методів конструктивного дослідження нелінійних крайових задач, тобто таких, які не тільки дозволяють з'ясувати питання існування розв'язку, але й пропонують алгоритм його знаходження. Серед таких методів особливе місце належить двобічним методам, які дозволяють оцінити невідомий розв'язок знизу та зверху, а отже, пропонують зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Розробці двобічних ітераційних методів присвячені роботи [1-7], але в них в основному розглядалися двовимірні крайові задачі, одновимірні інтегральні рівняння або одновимірні крайові задачі з першими крайовими умовами.

1. Постановка задачі. Метою роботи є розробка нових методів конструктивного дослідження нелінійного звичайного диференціального рівняння

$$-u''=f(x,u)\,,\ x\in(0,\,L)\,, \qquad (2)$$

якщо в точках $x=0$ та $x=L$ задані перші, другі або треті крайові умови.

Вважатимемо, що $f(x,u)$ додатна та неперервна за сукупністю змінних x, u, якщо $x\in(0,\,L)$, $u>0$.

За цих умов ставиться задача знаходження додатного розв'язку відповідної крайової задачі.

Усього є можливими дев'ять постановок крайових умов:

$$u(0)=0\,,\ u(L)=0\,, \qquad (3)$$

$$u(0)=0\,,\ u'(L)=0\,, \qquad (4)$$

$$u'(0)=0\,,\ u(L)=0\,, \qquad (5)$$

$$u(0)=0\,,\ u'(L)+k_2u(L)=0\,, \qquad (6)$$

$$u'(0)=0\,,\ u'(L)+k_2u(L)=0\,, \qquad (7)$$

$$u'(0)-k_1u(0)=0\,,\ u(L)=0\,, \qquad (8)$$

$$u'(0)-k_1u(0)=0\,,\ u'(L)=0\,, \qquad (9)$$

$$u'(0)-k_1u(0)=0\,,\ u'(L)+k_2u(L)=0\,, \qquad (10)$$

$$u'(0)=0\,,\ u'(L)=0\,, \qquad (11)$$

де $k_1>0$, $k_2>0$.

Відмітимо, що крайові умови (7), (9) є частинним випадком крайових умов (10), якщо $k_1=0$, $k_2=0$ відповідно, а крайові умови (11) – частинний випадок крайових умов (10), якщо одночасно $k_1=0$ і $k_2=0$.

Для аналізу кожної з поставлених крайових задач застосуємо методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [4, 6].

2. Деякі відомості з теорії нелінійних операторів у просторах з конусом. Наведемо деякі факти з теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах, які будуть використовуватися далі [4, 6].

Нехай E – дійсний банахів простір, θ – нульовий елемент простору E. Замкнена опукла множина $K\subset E$ називається конусом, якщо з того, що $u\in K$, $u\ne\theta$, випливає $\alpha u\in K$ при $\alpha\ge 0$ та $-u\notin K$.

Будь-який конус $K\subset E$ дозволяє ввести у просторі E напівупорядкованість за правилом: $v\le w$, якщо $w-v\in K$. Елементи $u\ge\theta$ (тобто $u\in K$) називають додатними. Множина елементів $<v,w>$ напівупорядкованого простору, яка складається з тих $u\in E$, для яких $v\le u\le w$, називається конусним відрізком.

Важливий клас конусів для застосувань теорії напівупорядкованих просторів у обчислювальній математиці складають нормальні конуси. Конус K називається нормальним, якщо існує таке число $N(K) > 0$, що з $\theta \le v \le w$ випливає $\|v\| \le N(K)\|w\|$. У цьому випадку кажуть, що норма напівмонотонна. Якщо $N(K) = 1$, то конус називають гострим і кажуть, що норма монотонна.

Розглянемо означення деяких класів операторів у просторах з конусом.

Оператор $T: E \to E$ називається додатним, якщо він залишає інваріантним конус K, тобто $T(u) \in K$ для будь-якого $u \in K$.

Оператор $T: E \to E$ називається гетеротонним, якщо він дозволяє діагональне подання $T(u) \equiv \hat{T}(u, u)$, де супровідний оператор $\hat{T}: E \times E \to E$ монотонно зростає за першим аргументом і спадає за другим, тобто

а) якщо $v_1 \le v_2$, то $\hat{T}(v_1, w) \leqslant \hat{T}(v_2, w)$ для всіх $w \in E$;

б) якщо $w_1 \le w_2$, то $\hat{T}(v, w_1) \ge \hat{T}(v, w_2)$ для всіх $v \in E$.

Конусний відрізок $< v_0, w_0 >$ називається сильно інваріантним для гетеротонного оператора T, якщо

$$\hat{T}(v_0, w_0) \ge v_0, \ \hat{T}(w_0, v_0) \le w_0.$$

Зафіксуємо деякий ненульовий елемент $u_0 \in K$ і позначимо через $K(u_0)$ множину тих елементів $u \in K$, для яких можна вказати такі $\alpha, \beta > 0$, що $\alpha u_0 \le u \le \beta u_0$.

Додатний гетеротонний оператор T називається псевдоувігнутим, якщо $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$ для будь-яких $v, w \in K$, $v \ne \theta$, $w \ne \theta$, і для будь-яких $v, w \in K(u_0)$ і $\tau \in (0; 1)$:

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \ge \tau \hat{T}(v, w),$$

причому знак рівності тут неможливий.

Псевдоувігнутий оператор T називається u_0-псевдоувігнутим, якщо для будь-яких $v, w \in K(u_0)$ і $\tau \in (0; 1)$ можна знайти таке $\eta(v, w, \tau) > 0$, що

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \ge \tau[1 + \eta(v, w, \tau)]\hat{T}(v, w).$$

Має місце таке твердження [6]: якщо конус K є нормальним, оператор $\hat{T}$ цілком неперервним, для T існує сильно інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$, а система $\hat{T}(v, w) = v$, $\hat{T}(v, w) = w$ на $< v_0, w_0 >$ не має розв'язків таких, що $v \ne w$, то ітераційний процес, який формується за правилом

$$v_{n+1} = \hat{T}(v_n, w_n), \ w_{n+1} = \hat{T}(w_n, v_n), \ n = 0, 1, 2, \dots,$$

починаючи з точки (v_0, w_0), двобічно збігається до єдиної на (v_0, w_0) нерухомої точки u^* оператора T:

$$v_0 \le v_1 \le \dots \le v_n \le \dots \le u^* \le \dots \le w_n \le \dots \le w_1 \le w_0.$$

Відомо [6], що система $\hat{T}(v, w) = v$, $\hat{T}(v, w) = w$ на $< v_0, w_0 >$ не має розв'язків таких, що $v \ne w$, якщо T – u_0-псевдоувігнутий оператор.

3. Побудова двобічних наближень. Нехай $C[0, L]$ – банахів простір неперервних на $[0, L]$ функцій з нормою $\|u\| = \max\limits_{x \in [0, L]} |u(x)|$. Виділимо у $C[0, L]$ конус $K_+ = \{u \in C[0, L] : u(x) \ge 0, \ x \in [0, L]\}$ невід'ємних функцій. Зазначимо, що конус K_+ у $C[0, L]$ є нормальним (і навіть гострим) [4, 6].

За допомогою конуса K_+ у просторі $C[0, L]$ введемо напівупорядкованість за правилом: для $u, v \in C[0, L]$ $u \le v$, якщо $v - u \in K_+$, тобто

$$u \le v, \text{ якщо } u(x) \le v(x) \text{ для всіх } x \in [0, L].$$

Нагадаємо [8], що функцією Гріна оператора $Lu = -\frac{d}{d}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u$ називається функція $G(x, s)$ така, що

1) $G(x, s)$ задовольняє однорідне рівняння

$$Lu = 0$$

всюди, крім точки $x = s$ (s – довільна, але фіксована точка з $(0, L)$);

2) $G(x, s)$ задовольняє крайові умови задачі;

3) $G(x, s)$ неперервна за x при будь-якому фіксованому s;

4) має місце співвідношення

$$G'_x(s + 0, s) - G'_x(s - 0, s) = -\frac{1}{p(s)}.$$

Можна довести, що

$$G(x, s) = \begin{cases} -\dfrac{u_1(x)u_2(s)}{p(s)|W(s)|}, & 0 \le x \le s, \\ -\dfrac{u_1(s)u_2(x)}{p(s)|W(s)|}, & s < x \le L, \end{cases}$$

де $u_1(x)$ – нетривіальний розв'язок однорідного рівняння $Lu = 0$, що задовольняє крайову умову при $x = 0$; $u_2(x)$ – нетривіальний розв'язок однорідного рівняння $Lu = 0$, що задовольняє крайову умову при $x = L$; $|W(s)| = \begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1'(s) & u_2'(s) \end{vmatrix}$ – визначник Вронського функцій u_1, u_2.

Функція Гріна існує за умови, що $\lambda = 0$ не є власним значенням оператора L [8].

Нехай $G(x,s)$ – функція Гріна оператора $-\frac{d^2u}{dx^2}$ для одних з крайових умов (3) – (10) (функція Гріна оператора $-\frac{d^2u}{dx^2}$ для другої крайової задачі – умови (11) – не існує). Аналітичний вигляд функції Гріна оператора $-\frac{d^2u}{dx^2}$ для різного типу крайових умов наведено у табл. 1. Тоді крайова задача для рівняння (2) з одними з крайових умов (3) – (10) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна:

$$u(x) = \int_0^L G(x,s) f(s, u(s)) ds . \qquad (12)$$

Розв'язком (узагальненим) крайової задачі для рівняння (2) з одними з крайових умов (3) – (10) називатимемо функцію $u^* \in C[0, L]$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (12).

Таблиця 1

№	Крайові умови при $x=0$	Крайові умови при $x=L$	Вигляд функції Гріна $G(x, s)$	Функція $u_0(x) = \int_0^L G(x, s)ds$
1	$u(0)=0$	$u(L)=0$	$\begin{cases} \frac{x(L-s)}{L}, & 0 \le x \le s, \\ \frac{s(L-x)}{L}, & s < x \le L. \end{cases}$	$\frac{x(L-x)}{2}$
2	$u(0)=0$	$u'(L)=0$	$\begin{cases} x, & 0 \le x \le s, \\ s, & s < x \le L. \end{cases}$	$\frac{x(2L-x)}{2}$
3	$u'(0)=0$	$u(L)=0$	$\begin{cases} L-s, & 0 \le x \le s, \\ L-x, & s < x \le L. \end{cases}$	$\frac{(L+x)(L-x)}{2}$
4	$u(0)=0$	$u'(L)+k_2u(L)=0$	$\begin{cases} \frac{x[1+k_2(L-s)]}{1+k_2L}, & 0 \le x \le s, \\ \frac{s[1+k_2(L-x)]}{1+k_2L}, & s < x \le L. \end{cases}$	$\frac{x[L(2+k_2L)-(1+k_2L)x]}{2(1+k_2L)}$
5	$u'(0)=0$	$u'(L)+k_2u(L)=0$	$\begin{cases} \frac{1+k_2(L-s)}{k_2}, & 0 \le x \le s, \\ \frac{1+k_2(L-x)}{k_2}, & s < x \le L. \end{cases}$	$\frac{2L+k_2(L-x)(L+x)}{2k_2}$
6	$u'(0)-k_1u(0)=0$	$u(L)=0$	$\begin{cases} \frac{(k_1x+1)(L-s)}{1+k_1L}, & 0 \le x \le s, \\ \frac{(k_1s+1)(L-x)}{1+k_1L}, & s < x \le L. \end{cases}$	$\frac{(L-x)[L+(1+k_1L)x]}{2(1+k_1L)}$
7	$u'(0)-k_1u(0)=0$	$u'(L)=0$	$\begin{cases} \frac{k_1x+1}{k_1}, & 0 \le x \le s, \\ \frac{k_1s+1}{k_1}, & s < x \le L. \end{cases}$	$\frac{2L+k_1x(2L-x)}{2k_1}$
8	$u'(0)-k_1u(0)=0$	$u'(L)+k_2u(L)=0$	$\begin{cases} \frac{(k_1x+1)[1+k_2(L-s)]}{k_1+k_2+k_1k_2L}, & 0 \le x \le s, \\ \frac{(k_1s+1)[1+k_2(L-x]}{k_1+k_2+k_1k_2L}, & s < x \le L. \end{cases}$	$\frac{L(2+k_2L)+k_1L(2+k_2L)x}{2(k_1+k_2+k_1k_2L)} - \frac{x^2}{2}$
9	$u'(0)=0$	$u'(L)=0$	не існує	—

З рівнянням (12) пов’яжемо нелінійний інтегральний оператор, який діє у $C[0, L]$ за правилом

$$(Tu)(x) = \int_0^L G(x,s) f(s, u(s)) ds . \qquad (13)$$

З табл. 1 бачимо, що для всіх крайових умов (3) – (10) функція Гріна оператора $-\frac{d^2u}{dx^2}$ є невід’ємною: $G(x,s) \ge 0$, $x, s \in [0, L]$, та неперервною у квадраті $0 \le x, s \le L$. Оскільки $f(x,u)$ додатна, якщо $x \in (0, L)$, $u > 0$, то оператор T є додатним, тобто залишає інваріантним конус K_+: $T(K_+) \subset K_+$.

Припустимо, що функція $f(x,u)$ дозволяє діагональне подання $f(x,u) = \hat{f}(x,u,u)$, де неперервна за сукупністю змінних x, v, w функція $\hat{f}(x,v,w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $x \in (0, L)$. Тоді оператор T вигляду (13) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v,w)(x) = \int_0^L G(x,s) \hat{f}(s, v(s), w(s)) ds . \qquad (14)$$

Очевидно, що оператори T і $\hat{T}$ є цілком неперервними.

Якщо функція $f(x,u)$ монотонно зростає за u для всіх $x \in (0, L)$, можна обрати $\hat{f}(x,v,w) = f(x,v)$, а для монотонно спадної за u функції $f(x,u)$ можна покласти $\hat{f}(x,v,w) = f(x,w)$.

У конусі K_+ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $< v^0, w^0 >$ умовами

$$\hat{T}(v^0, w^0) \ge v^0 , \ \hat{T}(w^0, v^0) \le w^0 ,$$

тобто

$\int_0^L G(x,s) \hat{f}(s, v^0(s), w^0(s)) ds \ge v^0(x)$ для всіх $x \in [0, L]$,

$\int_0^L G(x,s) \hat{f}(s, w^0(s), v^0(s)) ds \le w^0(x)$ для всіх $x \in [0, L]$.

Сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}) , \ w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}) ,$$

$$k = 0,1,2,\dots ; \ v^{(0)} = v^0 , \ w^{(0)} = w^0 ,$$

тобто

$$v^{(k+1)}(x) = \int_0^L G(x,s) \hat{f}(s, v^{(k)}(s), w^{(k)}(s)) ds , \qquad (15)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_0^L G(x,s) \hat{f}(s, w^{(k)}(s), v^{(k)}(s)) ds , \qquad (16)$$

$$k = 0,1,2,\dots ,$$

$$v^{(0)}(x) = v^0(x) , \ w^{(0)}(x) = w^0(x) . \qquad (17)$$

З огляду на сильну інваріантність конусного відрізка $< v^0, w^0 >$ та гетеротонність оператора T, для якого оператор $\hat{T}$ є супровідним, можна зробити висновок про те, що послідовність $\{v^{(k)}(x)\}$ не спадає за конусом K_+, а послідовність $\{w^{(k)}(x)\}$ не зростає за конусом K_+. Крім того, з нормальності конуса K_+ і цілком неперервності оператора $\hat{T}$ випливає існування границь $v^*(x)$ і $w^*(x)$ цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \le v^{(1)} \le \dots \le v^{(k)} \le \dots \le v^* \le$$
$$\le w^* \le \dots \le w^{(k)} \le \dots \le w^{(1)} \le w^{(0)} = w^0 .$$

Функції v^* і w^* є розв’язком системи рівнянь

$$v^* = \hat{T}(v^*, w^*) , \quad w^* = \hat{T}(w^*, v^*) ,$$

тобто системи

$$v^*(x) = \int_0^L G(x,s) \hat{f}(s, v^*(s), w^*(s)) ds ,$$

$$w^*(x) = \int_0^L G(x,s) \hat{f}(s, w^*(s), v^*(s)) ds .$$

Якщо ж отримали, що $v^* = w^* = u^*$, то u^* – єдина на конусному відрізку $< v^0, w^0 >$ нерухома точка оператора T, а отже, u^* – єдиний на $< v^0, w^0 >$ розв’язок відповідної крайової задачі.

Умовою, яка забезпечить єдиність додатного розв’язку крайової задачі, є u_0-псевдоувігнутість оператора T вигляду (13) [6].

Найбільш дослідженим є випадок першої крайової задачі (2), (3). Зокрема, доведено [6], що відповідний оператор T є u_0-псевдоувігнутим з

$$u_0(x) = \int_0^L G(x,s) ds$$

за умови: для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(x, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(x, v, w) , \ x \in (0, L) . \qquad (18)$$

Як бачимо, функція $u_0(x)$ задовольняє відповідні функції $G(x,s)$ крайові умови і є розв’язком рівняння $-u'' = 1$. Отже, у випадку крайових умов (4) – (10) умова (18) теж забезпечить виконання властивості u_0-псевдоувігнутості оператора T вигляду (13) з $u_0(x)=\int_0^L G(x,s)ds$. Крім того, можна запропонувати шукати кінці сильно інваріантного для оператора $\hat{T}$ вигляду (14) конусного відрізка у вигляді

$$v^0(x)=\alpha u_0(x),\ w^0(x)=\beta u_0(x).$$

Тоді для визначення α і β $(0\le\alpha<\beta)$ маємо систему нерівностей: для всіх $x\in[0, L]$

$$\int_0^L G(x, s)\hat{f}(s, \alpha u_0(s), \beta u_0(s))ds \ge \alpha u_0(x), \quad (19)$$

$$\int_0^L G(x, s)\hat{f}(s, \beta u_0(s), \alpha u_0(s))ds \le \beta u_0(x). \quad (20)$$

Отже, справджується така теорема.

Теорема. *Нехай система нерівностей (19), (20) має розв'язок* (α,β) *такий, що* $0\le\alpha<\beta$, *і виконується умова (18). Тоді ітераційний процес (15) – (17) збігається до єдиного неперервного додатного розв'язку* $u^*\in<\alpha u_0, \beta u_0>$ *відповідної крайової задачі для рівняння (2), причому мають місце нерівності*

$$v^0=v^{(0)}\le v^{(1)}\le\ldots\le v^{(k)}\le\ldots\le u^*\le$$
$$\le\ldots\le w^{(k)}\le\ldots\le w^{(1)}\le w^{(0)}=w^0.$$

За наближений розв'язок крайової задачі на k-й ітерації приймаємо функцію

$$u^{(k)}(x)=\frac{w^{(k)}(x)+v^{(k)}(x)}{2}.$$

Зауважимо, що перевагою побудованих двобічних ітераційних процесів є те, що на кожній k-й ітерації ми маємо зручну оцінку похибки для наближеного розв'язку:

$$\left\|u^*-u^{(k)}\right\|_{C[0, L]}\le\frac{1}{2}\max_{x\in[0, L]}(w^{(k)}(x)-v^{(k)}(x)).$$

Тоді, якщо задана точність $\varepsilon>0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x\in[0, L]}(w^{(k)}(x)-v^{(k)}(x))<2\varepsilon$$

і з точністю ε можна вважати, що $u^*(x)\approx u^{(k)}(x)$.

4. Результати обчислювального експерименту. Обчислювальний експеримент для рівняння (2) було проведено для $f(u)=\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}$ при $L=1$ і крайових умовах (3), (4), (6), (10).

Відповідний інтегральний оператор

$$(Tu)(x)=\int_0^L G(x,s)\left(\sqrt{u(s)}+\frac{1}{\sqrt{u(s)}}\right)ds,$$

очевидно, є гетеротонним з супровідним оператором вигляду

$$\hat{T}(v, w)(x)=\int_0^L G(x,s)\left(\sqrt{v(s)}+\frac{1}{\sqrt{w(s)}}\right)ds.$$

Безпосередньою перевіркою встановлено виконання умови (18): для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau\in(0, 1)$

$$\sqrt{\tau v}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\tau}w}}>\tau\left(\sqrt{v}+\frac{1}{\sqrt{w}}\right),$$

або

$$(\sqrt{\tau}-\tau)\left(\sqrt{v}+\frac{1}{\sqrt{w}}\right)>0.$$

У випадку крайових умов (3) отримано, що кінці сильно інваріантного конусного відрізка можна визначити значеннями $\alpha=2{,}55$, $\beta=2{,}85$. Збіжність з точністю $\varepsilon=10^{-3}$ отримано на четвертій ітерації. На рис. 1 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ та нижніх наближень $v^{(k)}(x)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$, а в табл. 2 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(4)}(x)$ в точках $x_i=0{,}25i$, $i=0, 1, 2, 3, 4$.

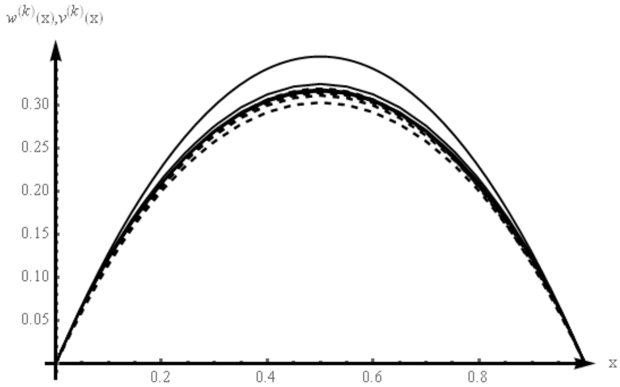

Рис. 1

Таблиця 2

x	0,0	0,25	0,50	0,75	1,0
$u^{(4)}$	0	0,2416	0,3156	0,2416	0

Для крайових умов (4) отримано, що кінці сильно інваріантного конусного відрізка можна визначити значеннями $\alpha=1{,}75$, $\beta=2{,}60$. Збіжність з точністю $\varepsilon=10^{-3}$ отримано на п'ятій ітерації. На рис. 2 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ та нижніх наближень $v^{(k)}(x)$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$, а в табл. 3 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(5)}(x)$ в точках $x_i=0{,}25i$, $i=0, 1, 2, 3, 4$.

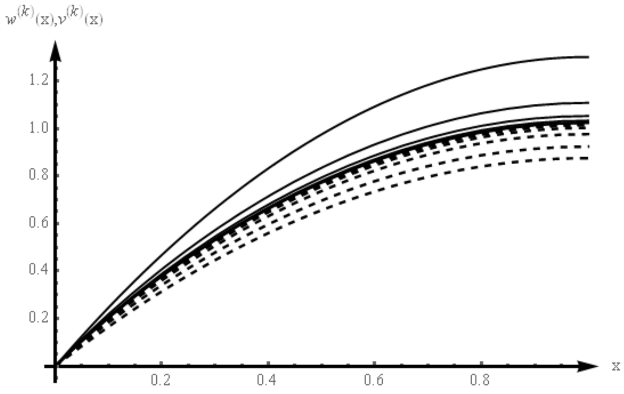

Рис. 2

Таблица 3

x	0,0	0,25	0,50	0,75	1,0
$u^{(5)}$	0	0,4561	0,7701	0,9576	1,0200

У випадку крайових умов (6) (при $k_2 = 1$) отримано, що кінці сильно інваріантного конусного відрізка можна визначити значеннями $\alpha = 1,60$, $\beta = 2,75$. Збіжність з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ отримано на п'ятій ітерації. На рис. 3 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ та нижніх наближень $v^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, а в табл. 4 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(5)}(x)$ в точках $x_i = 0,25i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

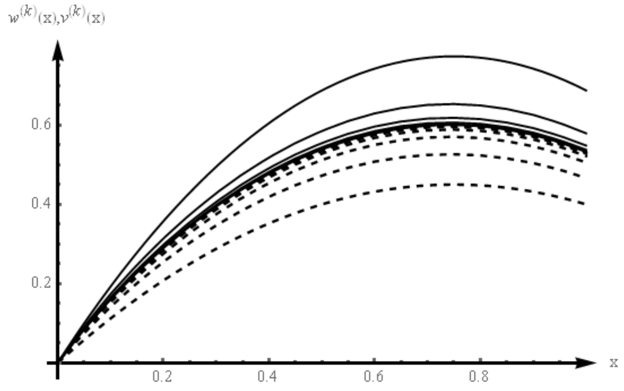

Рис. 3

Таблица 4

x	0,0	0,25	0,50	0,75	1,0
$u^{(5)}$	0	0,3447	0,5380	0,5995	0,5316

Для крайових умов (10) (при $k_1 = 1$, $k_2 = 1$) отримано, що кінці сильно інваріантного конусного відрізка можна визначити значеннями $\alpha = 1,85$, $\beta = 2,20$. Збіжність з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ отримано на п'ятій ітерації. На рис. 4 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ та нижніх наближень $v^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, а в табл. 5 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(5)}(x)$ в точках $x_i = 0,25i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

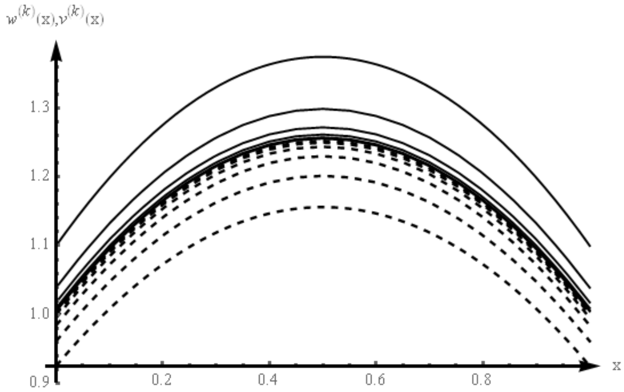

Рис. 4

Таблица 5

x	0,0	0,25	0,50	0,75	1,0
$u^{(5)}$	1,0033	1,1916	1,2544	1,1916	1,0033

5. Висновки. Вперше проведене дослідження можливості побудови двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійного звичайного диференціального рівняння $-u'' = f(x,u)$ для різних типів крайових умов. Отримано умови існування додатного розв'язку та умови двобічної збіжності до нього послідовних наближень. Одержані результати можуть бути використані у математичному моделюванні нелінійних процесів у науці та техніці. Також їх можна розповсюдити на звичайні диференціальні рівняння з більш загальною лівою частиною і використати при побудові на основі методу Роте напівдискретних методів чисельного аналізу квазілінійного рівняння теплопровідності. Це і визначає наукову новизну та практичну значущість отриманих у роботі результатів.

Література: 1. *Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В.* Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 2. С. 50 – 57. **2.** *Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В.* О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107 – 120. **3.** *Колосова С.В., Сидоров М.В.* Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью // Радиоэлектроника и информатика. 2013. № 3 (62). С. 28 – 31. **4.** *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1962. 394 с. **5.** *Курпель Н.С.*, *Шувар Б.А.* Двусторонние операторные неравенства и их применение. К.: Наук. думка, 1980. 268 с. **6.** *Опойцев В.И.*, *Хуродзе Т.А.* Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с. **7.** *Сидоров М.В.* Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. Вип. 16. С. 157 – 167. **8.** *Тихонов А.Н.*, *Васильева А.Б.*, *Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 254 с. **9.** *Франк-Каменецкий Д.А.* Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Интеллект, 2008. 408 с. **10.** *Шувар Б.А.*, *Копач М.І.*, *Ментинський С.М.*, *Обшта А.Ф.* Двосторонні наближені методи. Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. 515 с.

Transliterated bibliography:

1. *Kolosov A.I., Kolosova S.V., Sidorov M.V.* Konstruktivnoe issledovanie kraevyh zadach dlja nelinejnyh differencial'nyh uravnenij // Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Serija: fiziko-matematichni nauki. 2012. № 2. Pp. 50 – 57.

2. *Kolosova S.V., Luhanin V.S., Sidorov M.V.* O postroenii dvustoronnih priblizhenij k polozhitel'nomu resheniju uravnenija Lane-Emdena // Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Serija: fiziko-matematichni nauki. 2015. № 3. Pp. 107 – 120.

3. *Kolosova S.V., Sidorov M.V.* Primenenie iteracionnyh metodov k resheniju jellipticheskih kraevyh zadach s jekspo-nencial'noj nelinejnost'ju // Radiojelektronika i informatika. 2013. № 3 (62). Pp. 28 – 31.

4. *Krasnosel'skij M.A.* Polozhitel'nye reshenija operatornyh uravnenij. M.: GIFML, 1962. 394 p.

5. *Kurpel' N.S., Shuvar B.A.* Dvustoronnie operatornye neravenstva i ih primenenie. K.: Nauk. dumka, 1980. 268 p.

6. *Opojcev V.I., Hurodze T.A.* Nelinejnye operatory v prostranstvah s konusom. Tbilisi: Izd-vo Tbilis. un-ta, 1984. 246 p.

7. *Sidorov M.V.* Metod dvobichnih nablizhen' rozv'jazannja zadachi Dirihle dlja nelinijnogo rivnjannja teploprovidnosti // Matematichne ta komp'juterne modeljuvannja. Serija: Fiziko-matematichni nauki. 2017. Vip. 16. Pp. 157 – 167.

8. *Tihonov A.N., Vasil'eva A.B., Sveshnikov A.G.* Differen-cial'nye uravnenija. M.: FIZMATLIT, 2005. 254 p.

9. *Frank-Kameneckij D.A.* Osnovy makrokinetiki. Diffuzija i teploperedacha v himicheskoj kinetike. M.: Intellekt, 2008. 408 p.

10. *Shuvar B.A., Kopach M.I., Mentins'kij S.M., Obshta A.F.* Dvostoronni nablizheni metodi. Ivano-Frankovs'k: VDV CIT, 2007. 515 p.

Надійшла до редколегії 02.03.2018

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. Литвин О.М.

Вороненко Микита Дмитрович, студент гр. ПМ-14-1 фак-ту інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельні методи. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: mykyta.voronenko@nure.ua.

Сидоров Максим Вікторович, канд. фіз.-мат. наук, доцент каф. прикладної математики ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельні методи, математична фізика, теорія R-функцій та її застосування, стохастичний аналіз та його застосування. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: maxim.sidorov@nure.ua.

Voronenko Mykyta Dmytrovych, student of group PM-14-1 Faculty of Information and Analytical Technologies and Management, Kharkiv National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, numerical analysis. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057) 7021436. E-mail: mykyta.voronenko@nure.ua.

Sidorov Maxim Victorovich, Ph.D. in Physis and Maths, associate professor of the Applied Mathematics Department, Kharkov National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, numerical analysis, mathematical physics, R-function's theory and its applications, stochastic analysis and its applications. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057) 7021436. E-mail: maxim.sidorov@nure.ua.