СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.988 : 519.632

ДВОБІЧНІ ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ

СИДОРОВ М.В.

Розглядається проблема побудови ітераційних методів розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння. За допомогою функції Гріна чи квазіфункції Гріна-Рвачова розглядувана крайова задача зводиться до еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння, яке досліджується методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах. При цьому будується послідовність двобічних наближень, яка збігається до єдиного додатного розв'язку відповідної крайової задачі.

Ключові слова: додатний розв'язок; напівлінійне еліптичне рівняння; перша крайова задача; функція Гріна; квазіфункція Гріна-Рвачова; гетеротонний оператор; двобічні наближення.

Key words: positive solution; semilinear elliptic equation; first boundary value problem; Green's function; Green-Rvachev's quasi-function; heterotone operator; two-sided approach.

Вступ. Розв'язання задач математичного моделювання процесів у хімії, фізиці плазми, теорії горіння, біології тощо [7] приводить до необхідності дослідження першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння. Точні розв'язки таких крайових задач відомі лише у поодиноких випадках. До певних складнощів також приводить дослідження питання існування та єдиності розв'язку і його чисельне знаходження, особливо у областях некласичної геометрії. У зв'язку з цим актуальною науковою проблемою є розробка нових та вдосконалення існуючих методів конструктивного дослідження нелінійних крайових задач, які б не тільки дозволяли з'ясувати питання існування розв'язку, але й пропонували чисельний алгоритм його знаходження. Серед таких методів особливе місце належить двобічним методам, які дозволяють оцінити невідомий розв'язок знизу та зверху, а отже, надають зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Розробці двобічних ітераційних методів присвячені роботи [1-3, 5], але в них в основному розглядалися двовимірні крайові задачі для оператора Лапласа. Дана робота продовжує та узагальнює розпочаті в них дослідження на випадок еліптичного рівняння більш загального вигляду.

1. Постановка задачі. Метою роботи є розробка нових методів конструктивного дослідження крайової задачі

$$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla u)+q(\mathbf{x})u=f(\mathbf{x},u),\ \ \mathbf{x}\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(\mathbf{x})>0,\ \ \mathbf{x}\in\Omega, \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0, \tag{3}$$

де Ω – вимірна за Жорданом область з $\mathbb{R}^2$ чи $\mathbb{R}^3$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ ($\bar\Omega=\Omega\cup\partial\Omega$); $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, якщо $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, і $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, якщо $\Omega\subset\mathbb{R}^3$.

Вважатимемо, що

$$p(\mathbf{x})>0 \text{ у } \bar\Omega,\ q(\mathbf{x})\ge 0 \text{ у } \bar\Omega,$$

$p(\mathbf{x})$ неперервно диференційована у $\bar\Omega$,

$q(\mathbf{x})$ неперервна у $\bar\Omega$,

$f(\mathbf{x},u)$ неперервна і додатна при $\mathbf{x}\in\bar\Omega$, $u>0$.

Задача Діріхле (1)-(3) часто зустрічається у математичному моделюванні нелінійних стаціонарних процесів. При цьому умова додатності (2) природно випливає з сенсу функції u у тій чи іншій прикладній галузі.

2. Побудова еквівалентного інтегрального рівняння. Дослідження задачі (1)-(3) зручно проводити методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [4]. Для цього від задачі (1)-(3) треба перейти до операторного рівняння вигляду $u=T(u)$, замінивши крайову задачу еквівалентним інтегральним рівнянням. Це можна зробити двома основними способами – методом функцій Гріна і методом квазіфункцій Гріна-Рвачова.

Означення 1. Функцією Гріна $G(\mathbf{x},\mathbf{s})$ задачі (1)-(3) називатимемо розв'язок задачі

$$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x})\nabla G)+q(\mathbf{x})G=\delta(\mathbf{x},\mathbf{s}),\ \ \mathbf{x}\in\Omega\ \ (\mathbf{s}\in\Omega),$$

$$G|_{\partial\Omega}=0,$$

неперервний у $\bar\Omega$ всюди, окрім точки $\mathbf{x}=\mathbf{s}$. Тут $\delta(\mathbf{x},\mathbf{s})$ – δ-функція Дірака з особливістю у точці $\mathbf{x}=\mathbf{s}$.

Умови існування функції Гріна наведено, наприклад, у [6].

Якщо $G(\mathbf{x},\mathbf{s})$ – функція Гріна задачі (1)-(3), то ця задача еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x})=\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})f(\mathbf{s},u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \tag{4}$$

Розглядатимемо рівняння (4) у банаховому просторі $C(\bar\Omega)$ функцій, неперервних у $\bar\Omega$. Норма у $C(\bar\Omega)$ вводиться за правилом $\|u\|=\max_{\mathbf{x}\in\bar\Omega}|u(\mathbf{x})|$. У просторі $C(\bar\Omega)$ виділимо конус $K_+=\{u\in C(\bar\Omega): u(\mathbf{x})\ge 0,\ \mathbf{x}\in\bar\Omega\}$ невід'ємних функцій. Конус K_+ у $C(\bar\Omega)$ є нормальним (і навіть гострим). За допомогою конуса K_+ у просторі

$C(\bar{\Omega})$ введемо напівупорядкованість за правилом:

для $u, v \in C(\bar{\Omega})$ $u \leqslant v$, якщо $v - u \in K_+$,

тобто

$u \leqslant v$, якщо $u(\mathbf{x}) \le v(\mathbf{x})$ для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.

Наразі існування класичного розв'язку задачі (1)-(3), тобто такої функції $u^* \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, яка задовольняє рівняння (1) і умови (2), (3), ця функція також задовольняє і рівняння (4). Якщо ж класичного розв'язку немає, то інтегральне рівняння (4) можна взяти за основу означення узагальненого розв'язку задачі (1)-(3).

Означення 2. Розв'язком (узагальненим) крайової задачі (1)-(3) називатимемо функцію $u^* \in K_+$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (4).

З рівнянням (4) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор T, що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \qquad (5)$$

Властивості оператор T вигляду (5) викладені у наступній лемі.

Лема 1. Оператор T вигляду (5), де $G(\mathbf{x},\mathbf{s})$ – функція Гріна задачі (1)-(3), розглядуваний у просторі $C(\bar{\Omega})$, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних функцій, має такі властивості:

а) є додатним оператором, тобто $T(u) \in K_+$, якщо $u \in K_+$;

б) є u_0-додатним оператором, тобто для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ матиме місце подвійна нерівність

$$\alpha u_0(\mathbf{x}) \le \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \le \beta u_0(\mathbf{x}),$$

де $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$, а функція $u_0(\mathbf{x})$ визначається рівністю

$$u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) d\mathbf{s}; \qquad (6)$$

в) є гетеротонним оператором, для якого оператор $\hat{T}$ вигляду

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \qquad (7)$$

є супровідним, якщо функція $f(\mathbf{x}, u)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x}, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$, де неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, v, w функція $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$;

г) якщо для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(\mathbf{x}, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(\mathbf{x}, v, w), \ \mathbf{x} \in \Omega, \qquad (8)$$

є псевдоувігнутим і навіть u_0-псевдоувігнутим оператором, де функція $u_0(\mathbf{x})$ має вигляд (6).

Позначимо через $K(u_0)$ підмножину функцій u з K_+, для яких існують числа $\alpha, \beta > 0$ такі, що $\alpha u_0 \leqslant u \leqslant \beta u_0$. Тоді гетеротонний оператор T називається псевдоувігнутим, якщо для будь-яких ненульових елементів v, w з K_+ маємо, що $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$, і для всіх $v, w \in K(u_0)$ та будь-якого $\tau \in (0; 1)$ виконується нерівність $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{T}(v, w)$. Умова u_0-псевдоувігнутості для псевдоувігнутого оператора є більш жорсткою, ніж умова просто псевдоувігнутості: для всіх $v, w \in K(u_0)$ та будь-якого $\tau \in (0; 1)$ існує $\eta = \eta(v, w, \tau) > 0$ таке, що має місце нерівність $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau(1+\eta) \hat{T}(v, w)$.

Якщо функція $f(\mathbf{x}, u)$ монотонно зростає за u для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, то можна обрати $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, v)$, і супровідний оператор визначиться рівністю

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, v(\mathbf{s})) d\mathbf{s}.$$

Для монотонно спадної за u функції $f(\mathbf{x}, u)$ можна покласти $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, w)$ і тоді супровідний оператор матиме вигляд

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, w(\mathbf{s})) d\mathbf{s}.$$

Недоліком практичного застосування розглянутого підходу є те, що аналітичний вираз для функції Гріна може бути побудований у замкненому вигляді лише для обмеженої кількості областей Ω.

Розглянемо інший підхід до заміни задачі (1)-(3) еквівалентним інтегральним рівнянням, який вимагає лише знання фундаментального розв'язку рівняння.

Позначимо диференціальний оператор у лівій частині рівняння (1) через A:

$$Au \equiv -\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \nabla u) + q(\mathbf{x}) u. \qquad (9)$$

Областю визначення цього оператора вважатимемо множину функцій D_A, яка складається з функцій $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ таких, що $u|_{\partial\Omega} = 0$ і $Au \in L_2(\Omega)$.

Нехай $g(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – фундаментальний розв'язок рівняння (1). Існування фундаментального розв'язку доведено у роботах [6], крім того, доведено, що існують фундаментальні розв'язки, симетричні відносно $\mathbf{x}$ і $\mathbf{s}$. Далі вважатимемо, що фундаментальний розв'язок є симетричним: $g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g(\mathbf{s}, \mathbf{x})$.

Означення 3. Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора A вигляду (9) назвемо функцію

$$G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \qquad (10)$$

де $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$, $\mathbf{s}=(s_1, s_2)$ у випадку $\mathbb{R}^2$ і $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{s}=(s_1, s_2, s_3)$ у випадку $\mathbb{R}^3$; $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – симетрична ($\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})=\tilde{g}(\mathbf{s}, \mathbf{x})$) двічі диференційована у $\Omega\times\Omega$ функція така, що $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})=g(\mathbf{x}, \mathbf{s})$, якщо $\mathbf{x}\in\partial\Omega$ чи $\mathbf{s}\in\partial\Omega$.

Безпосередньо з цього випливає симетричність квазіфункції Гріна-Рвачова: $G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})=G_{quasi}(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ та те, що $G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})=0$ на $\partial\Omega$.

Крім того, квазіфункція при $\mathbf{x}=\mathbf{s}$ має таку ж особливість, що і звичайна функція Гріна, а завдяки вибору функції $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ можна досягти того, що квазіфункція Гріна-Рвачова буде додатною в області Ω.

Отже, матиме місце таке твердження.

Лема 2. Квазіфункція Гріна-Рвачова (10) має такі властивості:

а) $G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})=0$ на $\partial\Omega$;

б) є симетричною: $G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})=G_{quasi}(\mathbf{s}, \mathbf{x})$;

в) має таку ж особливість при $\mathbf{x}=\mathbf{s}$, що і звичайна функція Гріна;

г) додатна в області Ω: $G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})>0$, $\mathbf{x}, \mathbf{s}\in\Omega$, $\mathbf{x}\neq\mathbf{s}$.

Для функції $u\in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\bar{\Omega})$ такої, що $Au\in L_2(\Omega)$, має місце інтегральне подання [6]

$$u(\mathbf{x})=\int_{\partial\Omega} p(\mathbf{s})\left[g(\mathbf{x}, \mathbf{s})\frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n_s}}-u(\mathbf{s})\frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n_s}}\right]d_{\mathbf{s}}\sigma+$$
$$+\int_{\Omega} g(\mathbf{x}, \mathbf{s})A_{\mathbf{s}}u(\mathbf{s})d\mathbf{s},\ \mathbf{x}\in\Omega, \qquad (11)$$

а для функцій $u, \tilde{g}\in C^2(\bar{\Omega})$ має місце друга формула Гріна

$$\int_{\Omega}[\tilde{g}(\mathbf{s})A_{\mathbf{s}}u(\mathbf{s})-u(\mathbf{s})A_{\mathbf{s}}\tilde{g}(\mathbf{s})]d\mathbf{s}=$$
$$=\int_{\partial\Omega} p(\mathbf{s})\left[u(\mathbf{s})\frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n_s}}-\tilde{g}(\mathbf{s})\frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n_s}}\right]d_{\mathbf{s}}\sigma. \qquad (12)$$

У формулах (11), (12) $\mathbf{n_s}$ – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль у змінних $\mathbf{s}$, $d_{\mathbf{s}}\sigma$ означає, що інтегрування за $\mathbf{s}$ ведеться вздовж $\partial\Omega$, $A_{\mathbf{s}}u\equiv-\mathrm{div}(p(\mathbf{s})\nabla u)+q(\mathbf{s})u$.

Нехай u – класичний розв'язок задачі (1)-(3), тобто функція $u\in D_A$ задовольняє рівняння (1), а функцію $\tilde{g}$ у (12) оберемо таку, як в означенні 3. Додаючи рівності (11) і (12) та враховуючи рівняння (1) і те, що $G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})=0$ і $u(\mathbf{x})=0$ на $\partial\Omega$, отримаємо інтегральне рівняння

$$u(\mathbf{x})=\int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s}+\int_{\Omega} G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \qquad (13)$$

де позначено $K(\mathbf{x}, \mathbf{s})=A_{\mathbf{s}}\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$.

Нелінійне інтегральне рівняння (13) можна також подати у вигляді рівняння Урисона

$$u(\mathbf{x})=\int_{\Omega} P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \qquad (14)$$

де $P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u(\mathbf{s}))=K(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})+G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))$.

Отже, якщо задача (1)-(3) має класичний розв'язок, то він задовольняє також рівняння (13) (чи (14)). Якщо ж класичного розв'язку задачі не існує, то рівняння (13) можна використати для введення поняття узагальненого розв'язку задачі (1)-(3).

Рівняння (13) розглядатимемо у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних у $\bar{\Omega}$, напівупорядкованому конусом K_+.

Означення 4. Розв'язком (узагальненим) крайової задачі (1)-(3) називатимемо функцію $u^*\in K_+$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (13).

Введемо до розгляду нелінійний оператор T, що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T(u)(\mathbf{x})=\int_{\Omega} P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}=$$
$$=\int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s}+\int_{\Omega} G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \qquad (15)$$

Оператор T є сумою лінійного інтегрального оператора T_1 з ядром $K(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ і нелінійного оператора Гаммерштейна T_2 з ядром $G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$. Через умови, накладені на функцію $f(\mathbf{x}, u)$, і додатність квазіфункції Гріна-Рвачова $G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$, якщо $\mathbf{x}, \mathbf{s}\in\Omega$ ($\mathbf{x}\neq\mathbf{s}$), можна стверджувати, що оператор T_2 залишає інваріантним конус K_+, тобто T_2 – додатний оператор. Проте ми не можемо бути впевненими щодо знаку функції $K(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ при $\mathbf{x}, \mathbf{s}\in\Omega$ ($\mathbf{x}\neq\mathbf{s}$), а отже, не можемо стверджувати, що додатним є і оператор T.

Позначимо

$$K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})=\max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\},$$
$$K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})=\max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}.$$

Тоді $K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})\geq 0$, $K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})\geq 0$ при $\mathbf{x}, \mathbf{s}\in\Omega$ ($\mathbf{x}\neq\mathbf{s}$), причому

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{s})=K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})-K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$
$$|K(\mathbf{x}, \mathbf{s})|=K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})+K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

і оператор T вигляду (15) можна записати так:

$$T(u)(\mathbf{x})=\int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s}-\int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s}+$$
$$+\int_{\Omega} G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \qquad (16)$$

Припустимо, що функція $f(\mathbf{x},u)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x},u)=\hat{f}(\mathbf{x},u,u)$, причому неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, v, w невід'ємна функція $\hat{f}(\mathbf{x},v,w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x}\in\Omega$. Тоді оператор T вигляду (16) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_\Omega K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ + \int_\Omega G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \quad (17)$$

Зрозуміло, що оператори T і $\hat{T}$ є цілком неперервними.

Зауважимо, що для випадку, коли функція $f(\mathbf{x}, u)$ монотонно зростає за u для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, можна обрати $\hat{f}(x, v, w) = f(\mathbf{x}, v)$ і тоді супровідний оператор матиме вигляд

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_\Omega K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ + \int_\Omega G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}))d\mathbf{s},$$

а для $f(\mathbf{x}, u)$ монотонно спадної за u для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ можна покласти $\hat{f}(x, v, w) = f(\mathbf{x}, w)$ і тоді супровідним оператором буде

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_\Omega K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ + \int_\Omega G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})f(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}))d\mathbf{s}.$$

3. Побудова двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Вважатимемо, що оператор T вигляду (5) є гетеротонним з супровідним оператором вигляду (7). Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (4) (а отже, і крайової задачі (1)-(3)).

У конусі K_+ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $< v^0, w^0 >$ умовами: для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s}), w^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \geq v^0(\mathbf{x}),$$

$$\int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s}), v^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \leq w^0(\mathbf{x}).$$

Далі сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad (18)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad (19)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}), \; w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}). \quad (20)$$

Через сильну інваріантність конусного відрізка $< v^0, w^0 >$ та гетеротонність оператора T, для якого оператор $\hat{T}$ є супровідним, можна зробити висновок про те, що послідовність $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не спадає за конусом K_+, а послідовність $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не зростає за конусом K_+. Крім того, з нормальності конуса K_+ і повної неперервності оператора $\hat{T}$ випливає існування границь $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant v^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant v^* \leqslant \\ \leqslant w^* \leqslant \ldots \leqslant w^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0.$$

Можливими є два випадки: $v^* < w^*$ і $v^* = w^*$. У другому випадку $u^* := v^* = w^*$ – єдина на конусному відрізку $< v^0, w^0 >$ нерухома точка оператора T, а отже, u^* – єдиний на $< v^0, w^0 >$ розв'язок розглядуваної крайової задачі.

Функції $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ є розв'язком системи рівнянь

$$v(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad (21)$$

$$w(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \quad (22)$$

Рівність $v^* = w^*$ буде виконана, якщо система (21), (22) не має на $< v^0, w^0 >$ таких розв'язків, що $v \neq w$.

Отже, справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $< v^0, w^0 >$ *– сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора* T *вигляду (5) з супровідним оператором* $\hat{T}$ *вигляду (7) і система рівнянь (21), (22) не має на* $< v^0, w^0 >$ *розв'язків таких, що* $v \neq w$. *Тоді ітераційний процес (18)-(20) збігається у нормі простору* $C(\bar{\Omega})$ *до єдиного на* $< v^0, w^0 >$ *неперервного додатного розв'язку* u^* *крайової задачі (1)-(3), причому має місце ланцюг нерівностей*

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant v^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant u^* \leqslant \\ \leqslant \ldots \leqslant w^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0. \quad (23)$$

Ланцюг нерівностей (23) саме і характеризує ітераційний процес (18)-(21) як метод двобічних наближень.

Умови існування єдиного додатного розв'язку крайової задачі (1)-(3) та двобічної збіжності до нього послідовних наближень (18)-(21) можуть бути уточнені за рахунок з'ясування умов, за яких система рівнянь (21), (22) не має на $< v^0, w^0 >$ розв'язків таких, що $v \neq w$. Використовуючи умови, наведені у [4], отримаємо такі твердження.

Теорема 2. *Нехай* $< v^0, w^0 >$ *– сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора* T *вигляду (5) з супровідним оператором* $\hat{T}$ *вигляду (7) і для будь-яких чисел* v, w, u *таких, що* $0 < v < w$, $0 < u < w$, *і для всіх* $\mathbf{x} \in \Omega$ *має місце нерівність*

$$\hat{f}(\mathbf{x}, v + u, w - u) < \hat{f}(\mathbf{x}, v, w) + uM^{-1},$$

де $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$.

Тоді ітераційний процес (18)-(20) двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ *до єдиного на*

$< v^0, w^0 >$ *неперервного додатного розв'язку* u^* *крайової задачі (1)-(3).*

Теорема 3. *Нехай* $< v^0, w^0 >$ *– сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора* T *вигляду (5) з супровідним оператором* $\hat{T}$ *вигляду (7) і існує таке число* $L > 0$*, що функція* $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ *для всіх чисел* v, w *таких, що* $0 < v,\ w < M_0$*, де* $M_0 = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$*, і для всіх* $\mathbf{x} \in \Omega$ *задовольняє нерівність*

$$\left|\hat{f}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, v, w)\right| \le L|w - v|,$$

причому $\gamma = LM < 1$*, де* $M = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$*. Тоді ітераційний процес (18)-(20) двобічно збігається у нормі простору* $C(\bar{\Omega})$ *до єдиного на* $< v^0, w^0 >$ *неперервного додатного розв'язку* u^* *крайової задачі (1)-(3).*

Ще однією умовою того, що система рівнянь (21), (22) не має на сильно інваріантному конусному відрізку $< v^0, w^0 >$ розв'язків таких, що $v \ne w$, є умова u_0-псевдоувігнутості гетеротонного оператора T вигляду (5) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (7). Тоді з огляду на твердження г) леми 1 приходимо до такого результату.

Теорема 4. *Нехай* $< v^0, w^0 > \subset K(u_0)$ *– сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора* T *вигляду (5) з супровідним оператором* $\hat{T}$ *вигляду (7) і має місце умова (8). Тоді ітераційний процес (18)-(20) двобічно збігається у нормі простору* $C(\bar{\Omega})$ *до єдиного на* $< v^0, w^0 >$ *неперервного додатного розв'язку* u^* *крайової задачі (1)-(3).*

На k-й ітерації за наближений розв'язок крайової задачі (1)-(3) приймаємо функцію

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}. \qquad (24)$$

Тоді ми матимемо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (24):

$$\left\|u^* - u^{(k)}\right\| \le \frac{1}{2}\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})),$$

що є безумовною перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Отже, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$$

і з точністю ε можна вважати, що $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$.

Крім того, за умов теореми 3 можна записати і апріорну оцінку похибки:

$$\left\|u^* - u^{(k)}\right\| \le \frac{\gamma^k}{2}\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})).$$

Тоді з нерівності

$$\left\|u^* - u^{(k)}\right\| \le \frac{\gamma^k}{2}\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) < \varepsilon$$

знаходимо, що для досягнення точності ε треба зробити

$$k_0(\varepsilon) = \left[\frac{\ln\dfrac{\max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x}))}{2\varepsilon}}{\ln\dfrac{1}{LM}}\right] + 1$$

ітерацій, де квадратні дужки означають цілу частину числа.

4. Побудова двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова.

Для інтегрального рівняння (13) (чи (14)) побудуємо процес двобічних наближень знаходження його розв'язку (а отже, і розв'язку крайової задачі (1)-(3)).

Виділимо у конусі K_+ сильно інваріантний конусний відрізок $< v^0, w^0 >$ умовами: для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\int_\Omega K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_\Omega G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s}), w^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \ge v^0(\mathbf{x}),$$

$$\int_\Omega K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_\Omega G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s}), v^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \le w^0(\mathbf{x}).$$

Далі сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_\Omega G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \qquad (25)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_\Omega G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \qquad (26)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}),\ w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}). \qquad (27)$$

Оскільки конусний відрізок $< v^0, w^0 >$ є сильно інваріантним для гетеротонного оператора T, для якого оператор $\hat{T}$ є супровідним, то послідовність $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$ є неспадною за конусом K_+, а послідовність $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ є незростаючою за конусом K_+. Крім того, з нормальності конуса K_+ і повної неперервності оператора $\hat{T}$ випливає існування границь $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей. Тоді справджується ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant v^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant v^* \leqslant$$

$$\leqslant w^* \leqslant \ldots \leqslant w^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0.$$

Як і раніше, можливими є два випадки: $v^* < w^*$ і $v^* = w^*$. У другому випадку $u^* := v^* = w^*$ – єдина на конусному відрізку $< v^0, w^0 >$ нерухома точка оператора T, а отже, u^* – єдиний на $< v^0, w^0 >$ розв'язок крайової задачі (1)-(3).

Функції $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ є розв'язком системи рівнянь

$$v(\mathbf{x}) = \int_\Omega K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_\Omega K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_\Omega G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (28)$$

$$w(\mathbf{x}) = \int_\Omega K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_\Omega K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_\Omega G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (29)$$

Умовою виконання рівності $v^* = w^*$ є те, що система (28), (29) не має на $< v^0, w^0 >$ таких розв'язків, що $v \neq w$.

Отже, справджується така теорема.

Теорема 5. *Нехай* $< v^0, w^0 >$ *– сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора* T *вигляду (16) з супровідним оператором* $\hat{T}$ *вигляду (17) і система рівнянь (28), (29) не має на* $< v^0, w^0 >$ *розв'язків таких, що* $v \neq w$. *Тоді ітераційний процес (25)-(27) збігається у нормі простору* $C(\bar{\Omega})$ *до єдиного на* $< v^0, w^0 >$ *неперервного додатного розв'язку* u^* *крайової задачі (1)-(3), причому має місце ланцюг нерівностей*

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant v^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant u^* \leqslant \ldots \leqslant w^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0.$$

Умови існування єдиного додатного розв'язку крайової задачі (1)-(3) та двобічної збіжності до нього послідовних наближень (25)-(27) можна уточнити за рахунок з'ясування умов, за яких система рівнянь (28), (29) не має на $< v^0, w^0 >$ розв'язків таких, що $v \neq w$.

Можна довести такі твердження.

Теорема 6. *Нехай* $< v^0, w^0 >$ *– сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора* T *вигляду (16) з супровідним оператором* $\hat{T}$ *вигляду (17) і має місце умова: для будь-яких чисел* v, w, u *таких, що* $0 < v < w$, $0 < u < w$, *і для всіх* $\mathbf{x} \in \Omega$ *має місце нерівність*

$$\hat{f}(\mathbf{x}, v + u, w - u) < \hat{f}(\mathbf{x}, v, w) + \frac{u}{M + M_1},$$

де

$$M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_\Omega G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (30)$$

$$M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_\Omega [K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})] d\mathbf{s}. \quad (31)$$

Тоді ітераційний процес (25)-(27) двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ *до єдиного на* $< v^0, w^0 >$ *неперервного додатного розв'язку* u^* *крайової задачі (1)-(3).*

Теорема 7. *Нехай* $< v^0, w^0 >$ *– сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора* T *вигляду (16) з супровідним оператором* $\hat{T}$ *вигляду (17) і існує таке число* $L > 0$, *що функція* $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ *для всіх чисел* v, w *таких, що* $0 < v, w < M_0$, *де* $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$, *і для всіх* $\mathbf{x} \in \Omega$ *задовольняє нерівність*

$$\left| \hat{f}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, v, w) \right| \leq L |w - v|,$$

причому $\gamma = M_1 + LM < 1$, *де сталі* M *і* M_1 *визначаються рівностями (30) і (31) відповідно. Тоді ітераційний процес (25)-(27) двобічно збігається у нормі простору* $C(\bar{\Omega})$ *до єдиного на* $< v^0, w^0 >$ *неперервного додатного розв'язку* u^* *крайової задачі (1)-(3).*

Проте не всі умови збіжності двобічного ітераційного процесу з п. 3 можна перенести на випадок рівняння (13). Так, гетеротонний оператор T вигляду (16) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (17) не буде навіть псевдоувігнутим, бо нерівність, що визначає псевдоувігнутість, для нього прийме вигляд

$$\left(\tau - \frac{1}{\tau} \right) \int_\Omega K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_\Omega G_{quasi}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\hat{f}\left(\mathbf{s}, \tau v(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau} w(\mathbf{s}) \right) - \tau \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) \right] d\mathbf{s} > 0$$

і не буде виконуватися для значень τ, близьких до нуля, навіть якщо

$$\hat{f}\left(\mathbf{s}, \tau v(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau} w(\mathbf{s}) \right) - \tau \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) > 0.$$

Якщо виконано k ітерацій, то за наближений розв'язок крайової задачі (1)-(3) слід взяти функцію

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}. \quad (32)$$

Тоді для похибки для наближеного розв'язку (32) ми матимемо зручну апостеріорну оцінку:

$$\left\| u^* - u^{(k)} \right\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})). \quad (33)$$

Наявність оцінки вигляду (33) є безумовною перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$$

і тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$.

Крім того, за умов теореми 7 можна указати і апріорну оцінку похибки:

$$\left\|u^* - u^{(k)}\right\| \le \frac{\gamma^k}{2} \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) .$$

Тоді з нерівності

$$\left\|u^* - u^{(k)}\right\| \le \frac{\gamma^k}{2} \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) < \varepsilon$$

знаходимо, що для досягнення точності ε треба зробити

$$k_0(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \dfrac{\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x}))}{2\varepsilon}}{\ln \dfrac{1}{M_1 + LM}} \right] + 1$$

ітерацій, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

5. Висновки

Вперше проведене дослідження можливості побудови двобічних наближень до додатного розв'язку першої крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння (1). При цьому розглянуто два підходи: один – на основі використання точної функції Гріна розглядуваної задачі, а другий – на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова. Отримано умови існування додатного розв'язку та умови двобічної збіжності до нього послідовних наближень. Отримані результати можуть бути використані у математичному моделюванні стаціонарних нелінійних процесів у науці та техніці. Це і визначає наукову новизну та практичну значущість отриманих у роботі результатів.

Література: **1.** *Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В.* Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 2. С. 50 – 57. **2.** *Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В.* О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107 – 120. **3.** *Колосова С.В., Сидоров М.В.* Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью // Радиоэлектроника и информатика. 2013. № 3 (62). С. 28 – 31. **4.** *Опойцев В.И., Хуродзе Т.А.* Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с. **5.** *Сидоров М.В.* Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2017. № 2. С. 250 – 259. **6.** *Miranda C.* Partial Differential Equations of Elliptic Type. Springer, Berlin, 1970. **7.** *Pao C.V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. Plenum Press, New York, 1992.

Transliterated bibliography:

1. *Kolosov A.I., Kolosova S.V., Sidorov M.V.* Konstruktivnoe issledovanie kraevyh zadach dlja nelinejnyh differencial'nyh uravnenij // Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Serija: fiziko-matematichni nauki. 2012. № 2. Pp. 50 – 57.

2. *Kolosova S.V., Luhanin V.S., Sidorov M.V.* O postroenii dvustoronnih priblizhenij k polozhitel'nomu resheniju uravnenija Lane-Emdena // Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Serija: fiziko-matematichni nauki. 2015. № 3. Pp. 107 – 120.

3. *Kolosova S.V., Sidorov M.V.* Primenenie iteracionnyh metodov k resheniju jellipticheskih kraevyh zadach s jekspo-nencial'noj nelinejnost'ju // Radiojelektronika i informatika. 2013. № 3 (62). Pp. 28 – 31.

4. *Opojcev V.I., Hurodze T.A.* Nelinejnye operatory v prostranstvah s konusom. Tbilisi: Izd-vo Tbilis. un-ta, 1984. 246 p.

5. *Sidorov M.V.* Zastosuvannja metodiv funkcij Grina ta kvazifunkcij Grina-Rvachova dlja pobudovi dvobichnih iteracijnih procesiv rozv'jazannja nelinijnih krajovih zadach // Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Serija: fiziko-matematichni nauki. 2017. № 2. Pp. 250 – 259.

6. *Miranda C.* Partial Differential Equations of Elliptic Type. Springer, Berlin, 1970.

7. *Pao C.V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. Plenum Press, New York, 1992.

Надійшла до редколегії 10.06.2018

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. Литвин О.М.

Сидоров Максим Вікторович, канд. фіз.-мат. наук, доцент каф. прикладної математики ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельні методи, математична фізика, теорія R-функцій та її застосування, стохастичний аналіз та його застосування. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: maxim.sidorov@nure.ua.

Sidorov Maxim Victorovich, Ph.D. in Physis and Maths, associate professor, associate professor of the Applied Mathematics Department, Kharkov National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, numerical analysis, mathematical physics, R-function's theory and its applications, stochastic analysis and its applications. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057)7021436. E-mail: maxim.sidorov@nure.ua.