

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ R -ФУНКЦІЙ ДО МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКИХ СТАЦІОНАРНИХ ПОВІЛЬНИХ ТЕЧІЙ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

ГИБКІНА Н.В., СИДОРОВ М.В.,
ШПАКОВИЧ М.О.

Розглядається плоска стаціонарна повільна течія в'язкої нестисливої рідини. Для відповідної крайової задачі відносно функції течії на основі використання структурного методу R -функцій та варіаційного методу Рітца розробляється метод чисельного аналізу. Його робота ілюструється низкою обчислювальних експериментів.

Ключові слова: в'язка рідина; функція течії; рівняння Стокса; метод R -функцій; метод Рітца.

Key words: viscous fluid; stream function; Stokes equation; R -function's method; Ritz method.

Вступ. При дослідженні різних процесів у геофізиці, біології, теплоенергетиці, біомедицині виникає необхідність у моделюванні стаціонарних чи нестаціонарних течій в'язкої рідини. Серед використовуваних у гідродинаміці обчислювальних методів найбільш уживаними є метод скінченних різниць і метод скінченних елементів. Основною перевагою цих методів є простота реалізації, але вони мають істотний недолік – відсутність універсальності. Це призводить до того, що при переході до нової області (особливо складної геометрії) необхідно генерувати нову сітку, а часто і замінювати складні ділянки межі геометрично простими, складеними, наприклад, з відрізків прямих. Точно врахувати геометричну і аналітичну інформації, що входять в постановку задачі моделювання фізико-механічного поля, можна, скориставшись конструктивним апаратом теорії R -функцій академіка НАН України В.Л. Рвачова.

Метод R -функцій в задачах розрахунку в'язких течій застосовувався, наприклад, у роботах [1, 2, 8 – 10], але його обчислювальна реалізація була виконана лише для квадратної області та було відсутнє відновлення за функцією течії поля тиску.

Отже, вдосконалення існуючих методів математичного моделювання течій в'язкої нестисливої рідини на основі використання методу R -функцій є актуальною науковою задачею.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [2, 8, 9].

1. Мета та задачі дослідження

Метою роботи є вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу плоских стаціонарних повільних течій в'язкої рідини у скінченних одностов'язних областях. Для досягнення поставленої мети необхідно:

- на основі системи рівнянь Стокса отримати задачу для функції течії;
- для крайової задачі відносно функції течії побудувати метод її чисельного аналізу на основі використання структурно-варіаційного методу;
- описати процедуру відновлення характеристик в'язкого потоку (поля швидкостей, завихореності, поля тиску) за знайденою функцією течією;
- провести обчислювальні експерименти для тестових задач.

2. Постановка задачі

Стаціонарні повільні плоскопаралельні течії в'язкої нестисливої рідини в області Ω з межею $\partial\Omega$ характеризуються полем швидкостей та тиском і описуються системою рівнянь Нав'є-Стокса, лінеаризованою за Стоксом [4, 5]:

$$\mathbf{v} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_x}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\mathbf{v} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_y}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

де (x, y) – змінні декартової системи координат; яка задана в області Ω ; $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ – поле швидкостей рідини; ρ – густина рідини; \mathbf{v} – кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини; p – тиск.

Рівняння (1), (2) необхідно доповнити крайовою умовою

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}, \quad (3)$$

тут $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ – заданий вектор швидкості рідини на межі $\partial\Omega$.

Питання існування та єдиності розв'язку задачі (1) – (3) розглянуто, наприклад, у монографії [3]. У випадку плоскопаралельних течій від системи (1), (2) у змінних «швидкість-тиск» зручно перейти до задачі для функції течії ψ , яка пов'язана з вектором швидкості $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ співвідношеннями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Цей перехід зумовлений тим, що, вводячи функцію течії в такий спосіб, ми тотожно задовольняємо рівняння неперервності (2), а перехресним диференціюванням рівнянь (1) виключаємо з них тиск і зводимо їх до одного рівняння з бігармонічним оператором відносно функції ψ . Крім того, виходячи з крайової умови (3) на $\partial\Omega$, можна задати значення $\psi|_{\partial\Omega}$ і $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega}$, де \mathbf{n} – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль [8].

Отже, (1) – (3) зводиться до задачі для функції течії:

$$\Delta^2\psi = 0 \text{ у } \Omega, \quad (5)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = g_0(s), \quad s \in \partial\Omega. \quad (6)$$

де \mathbf{n} – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль; Δ^2 – бігармонічний оператор.

3. Метод чисельного аналізу

Застосуємо до розв'язання задачі (5), (6) метод R -функцій. Зауважимо, що при знаходженні розв'язку крайових задач математичної фізики метод R -функцій пропонує будувати так звану структуру розв'язку крайової задачі, тобто пучок функцій, який точно задовольняє всім крайовим умовам задачі і залежить від невідомих компонент. Їх далі обирають так, щоб у деякому сенсі задовольнити рівняння задачі. Для цього можна використовувати проєкційні чи варіаційні методи (метод Рітца, метод Галеркіна, метод найменших квадратів, колокацій тощо). Зазначимо, що при цьому геометрія області враховується точно. Відомо [7, 8], що крайовим умовам (6) задовольняє пучок функцій

$$\psi = f - \omega(g + D_1f) + \omega^2\Phi, \quad (7)$$

де $f = ECf_0$, $g = ECg_0$ – продовження функцій f_0 ; g_0 відповідно в Ω , $\omega = 0$ – нормалізоване рівняння $\partial\Omega$; Φ – невизначена компонента, а оператор D_1 діє за правилом $D_1u \equiv (\nabla\omega, \nabla u)$.

За допомогою заміни $\psi = \varphi + u$, де u – нова невідома функція, а $\varphi = f - \omega(g + D_1f)$, перейдемо від (5), (6) до задачі з однорідними крайовими умовами:

$$\Delta^2u = -\Delta^2\varphi \text{ у } \Omega, \quad (8)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9)$$

Із крайовою задачею (8), (9) пов'яжемо оператор A цієї крайової задачі, визначений на множині

$$D_A = \left\{ u \mid u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

і діючий за правилом $Au \equiv \Delta^2u$.

Можна довести, що такий оператор є симетричним і додатно означеним.

Поповнимо множину D_A в нормі, що породжена скалярним добутком $[u, v] = \iint_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx dy$, отримаємо енергетичний простір H_A .

Отже, задача знаходження узагальненого розв'язку (8), (9) еквівалентна задачі знаходження мінімуму у H_A функціоналу енергії [6, 9]:

$$F[u] = [u, u] - 2(u, -\Delta\varphi) = \iint_{\Omega} [(\Delta u)^2 + 2\Delta u \Delta\varphi] \, dx dy.$$

Крім того, з (7) випливає, що структура розв'язку крайової задачі (8), (9) має вигляд $u = \omega^2\Phi$.

Оберемо повну в $L_2(\Omega)$ послідовність функцій $\{\tau_k\}$ і шукатимемо апроксимацію невизначеної

компоненти Φ у вигляді $\Phi_N = \sum_{k=1}^N c_k \tau_k$. Тоді на-

ближений розв'язок задачі (8), (9) шукаємо у вигляді

$$u_N = \omega^2 \sum_{k=1}^N c_k \tau_k = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k,$$

де $\varphi_k = \omega^2 \tau_k$.

Послідовність $\{\varphi_k\}$ є координатною [6], тобто:

- 1) для будь-якого k $\varphi_k \in H_A$;
- 2) для будь-якого N елементи $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ лінійно незалежні;
- 3) система $\{\varphi_k\}$ повна в H_A .

Тоді для знаходження коефіцієнтів c_1, \dots, c_N можна скористатися методом Рітца [6], відповідно до якого отримуємо, що c_1, \dots, c_N – розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^N c_i [\varphi_i, \varphi_j] = -(\Delta\varphi, \Delta\varphi_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (10)$$

де

$$[\varphi_i, \varphi_j] = \iint_{\Omega} \Delta\varphi_i \Delta\varphi_j \, dx dy, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

$$(\Delta\varphi, \Delta\varphi_j) = \iint_{\Omega} \Delta\varphi \Delta\varphi_j \, dx dy, \quad j = 1, \dots, N.$$

Із загальних теорем збіжності методу Рітца [6] випливає

Теорема. Якщо $\varphi \in W_2^2(\Omega)$, то послідовність

$\psi_N = \varphi + u_N$ збігається в нормі простору $W_2^2(\Omega)$ до єдиного узагальненого розв'язку задачі (5), (6). Розв'язавши задачу (5), (6), ми дістанемо функ-

цію течії $\psi(x, y)$ і за формулами (4) відновимо поле швидкостей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ в'язкої рідини, а за формулою $\zeta = -\Delta\psi$ знайдемо завихореність. Для знаходження поля тиску $p(x, y)$ можна скористатися таким підходом. З рівнянь (1) з урахуванням (4) отримаємо

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\rho \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) = \nu\rho \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \nu\rho \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) = -\nu\rho \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right).$$

Тоді, застосовуючи процедуру відновлення функції за її повним диференціалом, отримаємо

$$p(x, y) = \int_{M_0M} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + C = \nu\rho \int_{M_0M} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) dx - \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) dy + C,$$

де $M_0(x_0, y_0)$ – фіксована точка області Ω ; $M(x, y)$ – довільна точка області Ω .

Оскільки важлива лише різниця тиску, а не його абсолютне значення, то можна покласти $C = 0$.

4. Результати обчислювального експерименту
Розглянемо задачу про усталену повільну течію в'язкої нестисливої рідини в каверні $\bar{\Omega}$, верхня кришка якої рухається вправо з одиничною швидкістю, а інші ділянки межі нерухомі. Обчислювальний експеримент було проведено для прямокутної області та для області, що є параболічним сегментом. Прямокутна область описувалась формулою

$$\omega(x, y) = \left[\frac{1}{a} x(a-x) \right] \wedge_0 \left[\frac{1}{b} y(b-y) \right],$$

а область, обмежена параболою, – формулою

$$\omega(x, y) = [b-y] \wedge_0 \left[\frac{1}{a} x(a-x) \right] \wedge_0 \frac{y - 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\sqrt{1 + 16\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}},$$

де \wedge_0 – знак R -кон'юнкції.

За базисні функції було обрано сплайни п'ятого порядку, оскільки для розрахунку поля тиску рідини необхідно обчислювати треті похідні, тобто невизначена компонента Φ апроксимувалася виразом

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=-2}^{N_x+2} \sum_{j=-2}^{N_y+2} c_{ij} B_5 \left(\frac{N_x x}{a} - i \right) B_5 \left(\frac{N_y y}{b} - j \right),$$

де $B_5(t)$ – сплайн Шенберга п'ятого степеня.

Для розрахунку інтегралів у системі (10) використано кубатурну формулу Гаусса з 16 вузлами по кожній координаті.

У випадку прямокутної області обчислювальний експеримент було проведено для різних співвідношень $a:b$. При відновленні поля тиску за початкову точку інтегрування обрано точку

$$M_0 = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right). \text{ Через } (x_{v.c.}, y_{v.c.}) \text{ позначатимемо}$$

координати вихрового центру, тобто точки, у якій $v_x = v_y = 0$.

Для випадку $a = b = 1$ на рис. 1 наведено лінії рівня функції течії, на рис. 2 показано лінії рівня завихореності ζ , на рис. 3 зображено векторне поле швидкостей рідини, а на рис. 4 – лінії рівня розподілу тиску в рідині для $N_x = N_y = 25$ (625 базисних функцій). Залежність характеристик течії від кроку сітки сплайнів наведено в табл. 1.

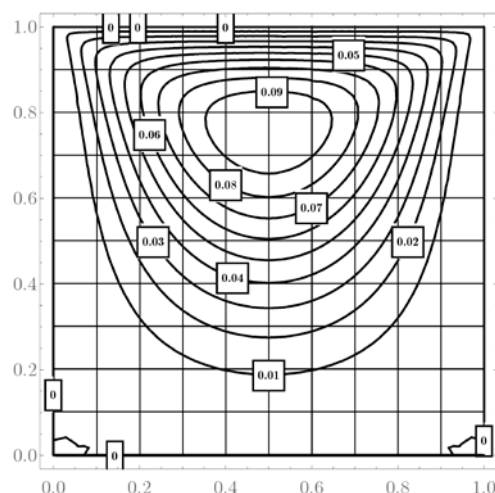


Рис. 1. Лінії рівня функції течії для прямокутної області при $a = b = 1$

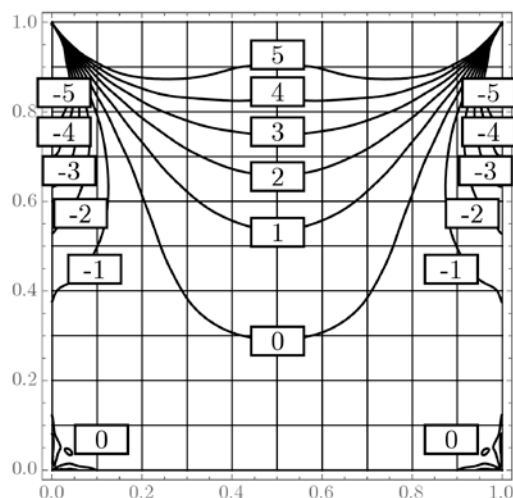


Рис. 2. Лінії рівня завихореності для прямокутної області при $a = b = 1$

Таблиця 1. Характеристики течії для прямокутної області при $a = b = 1$

Крок сітки сплайнів	0,33...	0,2	0,1
Кількість базисних функцій	64	100	225
$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	0,5 0,764128	0,5 0,764633	0,5 0,764987
$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	0,100017	0,100023	0,100079
$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	3,219050	3,178730	3,220383
$\max_{y \in [0, b]} v_x \left(\frac{a}{2}, y \right)$	0,207814	0,207722	0,207799
$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	0,041493	0,041492	0,041493
$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	0,217711	0,217679	0,217668
$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	0,140618	0,140614	0,140613
$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$	4,712152	4,939381	5,231048

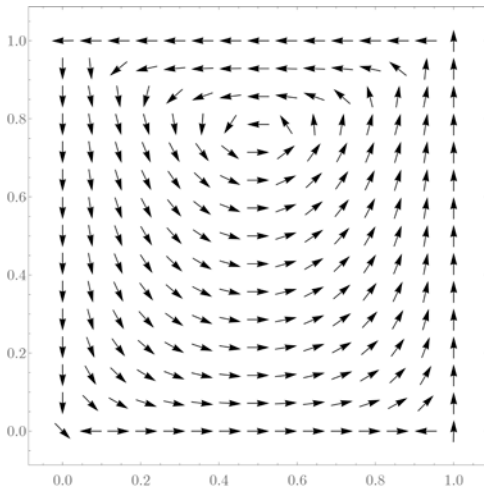


Рис. 3. Поле швидкостей рідини для прямокутної області при $a = b = 1$

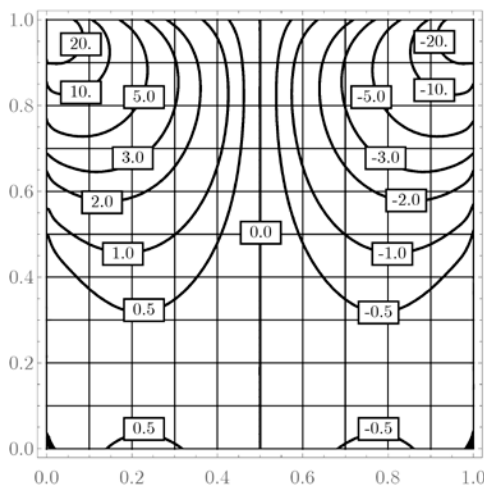


Рис. 4. Поле тиску рідини для прямокутної області при $a = b = 1$

Для випадку $a = 1, b = 0,5$ на рис. 5 наведено лінії рівня функції течії, на рис. 6 – лінії рівня завихореності ζ , на рис. 7 зображено векторне поле швидкостей рідини, а на рис. 8 показано лінії рівні розподілу тиску в рідині для $N_x = 45, N_y = 25$ (1125 базисних функцій). Залежність характеристик течії від кроку сітки сплайнів наведено в табл. 2.

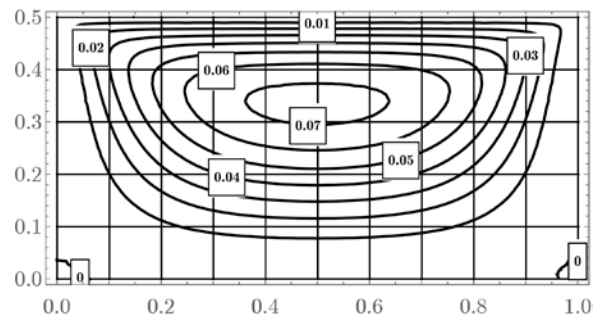


Рис. 5. Лінії рівня функції течії для прямокутної області при $a = 1, b = 0,5$

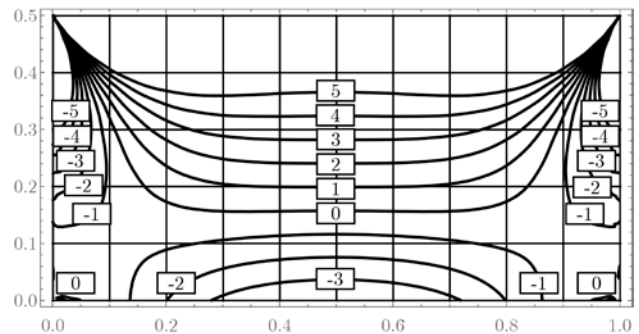


Рис. 6. Лінії рівня завихореності для прямокутної області при $a = 1, b = 0,5$

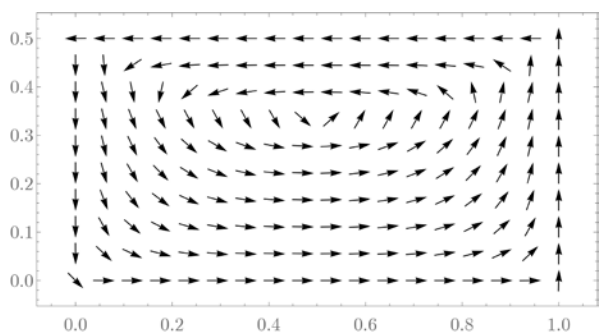


Рис. 7. Поле швидкостей рідини для прямокутної області при $a = 1, b = 0,5$

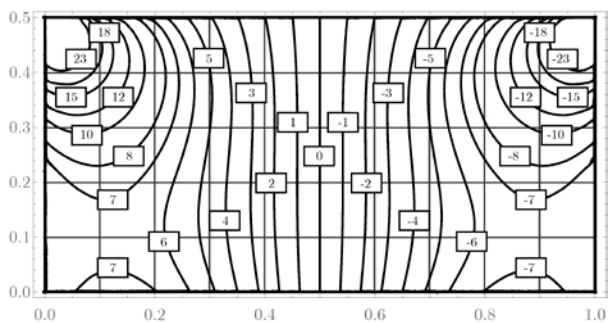


Рис. 8. Поле тиску рідини для прямокутної області при $a = 1$, $b = 0,5$

Таблиця 2. Характеристики течії для прямокутної області при $a = 1$, $b = 0,5$

Крок сітки сплайнів	0,25	0,1	0,05
Кількість базисних функцій	63	150	375
$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	0,5 0,335816	0,5 0,335627	0,5 0,335622
$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	0,073074	0,073120	0,073124
$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	4,276312	4,283014	4,299782
$\max_{y \in [0, b]} v_x \left(\frac{a}{2}, y \right)$	0,325021	0,324412	0,32450
$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	0,025725	0,025725	0,025725
$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	0,208126	0,208105	0,208102
$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	0,088160	0,088157	0,088156
$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$	4,948411	5,331692	5,603184

Для випадку $a = 1$, $b = 2$ на рис. 9 наведено лінії рівня функції течії, на рис. 10 – лінії рівня завихореності ζ , на рис. 11 зображено векторне поле швидкостей рідини, а на рис. 12 показано лінії рівні розподілу тиску в рідині для $N_x = 25$, $N_y = 45$ (1125 базисних функцій). Залежність характеристик течії від кроку сітки сплайнів наведено в табл. 3.

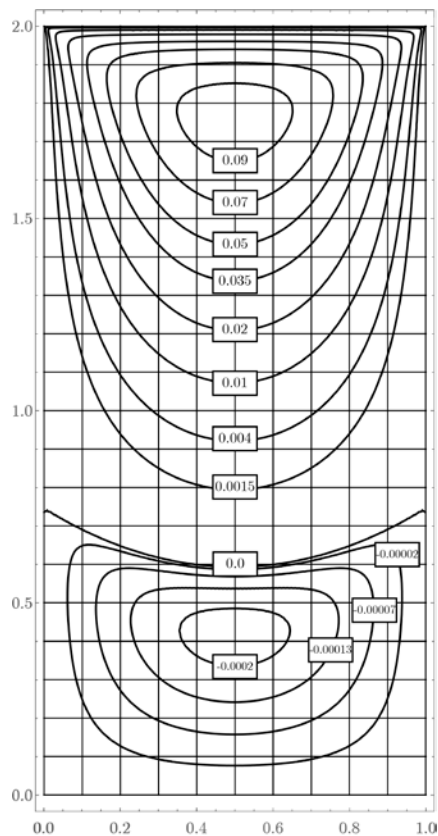


Рис. 9. Лінії рівня функції течії для прямокутної області при $a = 1$, $b = 2$

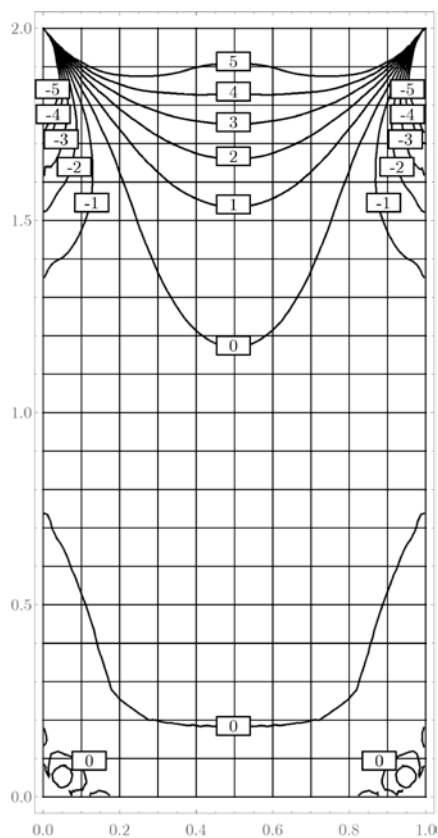


Рис. 10. Лінії рівня завихореності для прямокутної області при $a = 1$, $b = 2$

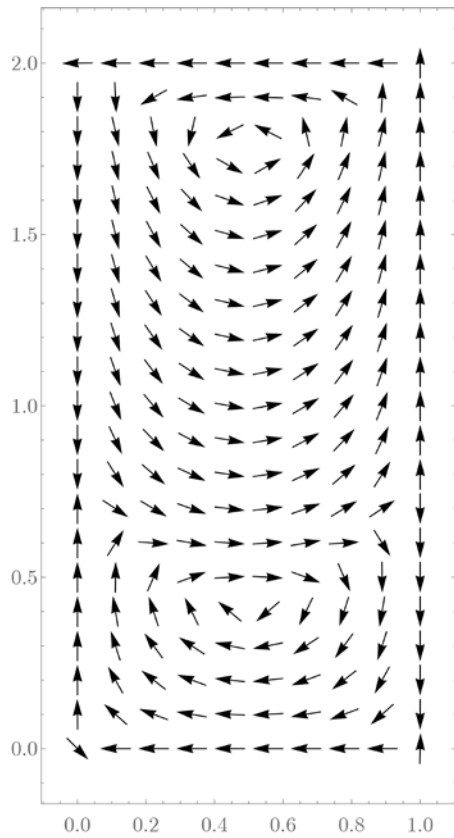


Рис. 11. Поле швидкостей рідини для прямокутної області при $a = 1$, $b = 2$

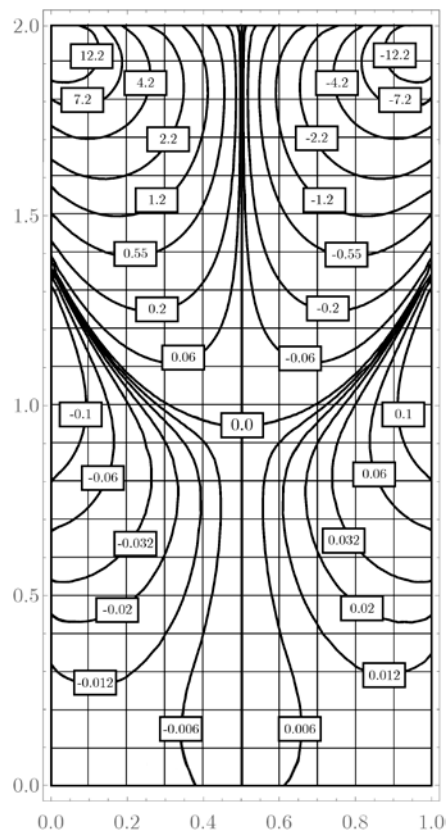


Рис. 12. Поле тиску рідини для прямокутної області при $a = 1$, $b = 2$

Таблиця 3. Характеристики течії для прямокутної області при $a = 1$, $b = 2$

Крок сітки сплайнів	0,33...	0,2	0,1
Кількість базисних функцій	88	150	375
$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	0,5 1,76118	0,5 1,76172	0,5 1,76205
$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	0,10099	0,100846	0,100904
$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	3,145871	3,130635	3,174554
$\max_{y \in [0, b]} v_x \left(\frac{a}{2}, y \right)$	0,196362	0,195271	0,194965
$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	0,042638	0,042625	0,042626
$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	0,216077	0,216001	0,215990
$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	0,144738	0,144686	0,144685
$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$	4,583791	4,937752	5,229444

Наведемо результати обчислювального експерименту для області, що є параболічним сегментом. На рис. 13 наведено лінії рівня функції течії, на рис. 14 – лінії рівня завихореності $\zeta = -\Delta\psi$, на рис. 15 зображено векторне поле швидкостей рідини, а на рис. 16 показано лінії рівня розподілу тиску в рідині для $N_x = 25$, $N_y = 25$ (усього 625 базисних функцій). Залежність характеристик течії від кроку сітки сплайнів наведено в табл. 4.

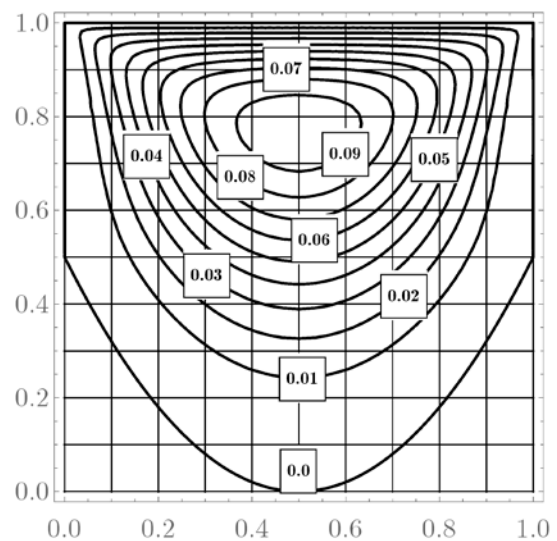


Рис. 13. Лінії рівня функції течії для параболічного сегмента

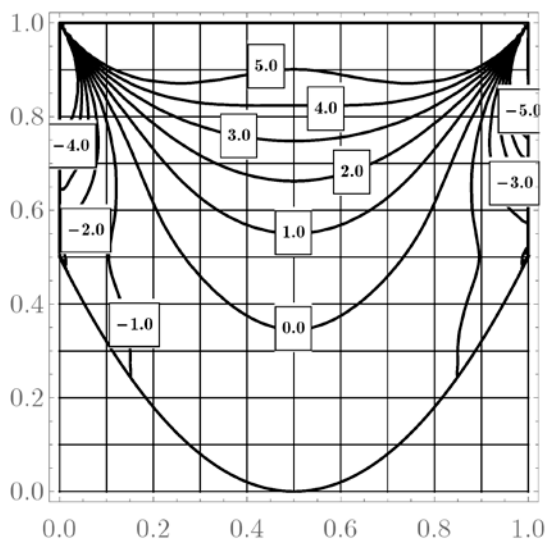


Рис. 14. Лінії рівня завихореності для параболічного сегмента

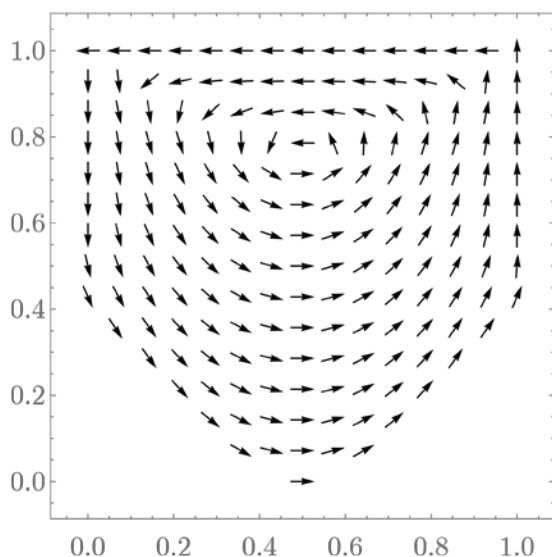


Рис. 15. Поле швидкостей рідини для параболічного сегмента

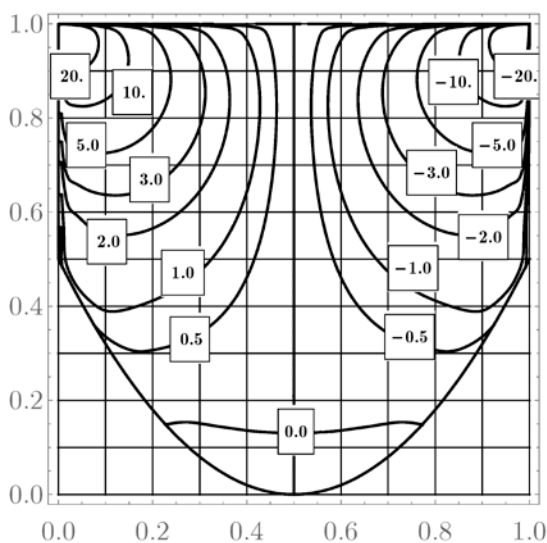


Рис. 16. Поле тиску рідини для параболічного сегмента

Таблиця 4. Характеристики течії для області, що обмежена параболою

Крок сітки сплайнів	0,2	0,1	0,05
Кількість базисних функцій	100	225	625
$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	0,5 0,768728	0,5 0,769845	0,5 0,772005
$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	0,096343	0,097351	0,097843
$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	3,26987	3,29175	3,31035
$\max_{y \in [0, b]} v_x \left(\frac{a}{2}, y \right)$	0,202585	0,216895	0,223475
$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	0,10987	0,11198	0,11302
$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	0,217711	0,217679	0,217668
$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	0,144738	0,144686	0,144685
$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$	4,948411	5,331692	5,603184

Як бачимо, в усіх випадках зі збільшенням вимірності апроксимаційного простору (тобто зі зменшенням кроку сітки сплайнів) числові характеристики течії усталюються, що свідчить про збіжність запропонованого методу. Крім того, результати обчислювальних експериментів для прямокутної області добре узгоджені з відомими з літератури результатами інших авторів, зокрема, з класичною роботою [11].

5. Висновки

В роботі подальший розвиток отримали застосування методу R -функцій у математичному моделюванні фізико-механічних полів у частині їх використання при розв'язанні задачі для функції течії в'язкого потоку з наступним відновленням за нею таких характеристик течії як векторне поле швидкостей, завихореність, поле тиску тощо. Отримані у роботі результати можна розповсюдити на течії, для яких не можна знехтувати нелінійними конвективними членами у системі Нав'є-Стокса, а також застосувати для розв'язання прикладних задач, пов'язаних з розрахунком в'язких течій. Це і визначає наукову новизну та практичну значущість отриманих у роботі результатів.

Література: 1. Артюх А.В., Сидоров М.В. Применение методов R -функций и Галеркина к расчету плоских нестационарных вязких течений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2011. № 2. С. 5-12. 2. Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение метода R -функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математика, прикладна

математика і механіка. № 602, вип. 53, 2003. С. 61-67.

3. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с. **4.** *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с. **5.** *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с. **6.** *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с. **7.** *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. **8.** *Сидоров М.В.* О построении структур решений задачи Стокса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. №3. С. 52-54. **9.** *Сидоров М.В.* Применение метода R-функций к расчету течения Стокса в квадратной каверне при малом числе Рейнольдса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. № 4 (21). С. 77-78. **10.** *Тевяшев А.Д., Гибкина Н.В., Сидоров М.В.* Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях // Радиоэлектроника и информатика. 2007. № 2 (37). С. 50-57. **11.** *Burggraf O. R.* Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flow // J. Fluid Mech. 1966. V. 24. P. 113-151.

Transliterated bibliography:

1. *Artjuh A.V., Sidorov M.V.* Primenenie metodov R-funkcij i Galerkina k raschetu ploskih nestacionarnyh vjazkih techenij. Visnyk Zaporiz'kogo nacional'nogo universytetu. Serija: fizyko-matematychni nauky. 2011. № 2. S. 5-12.

2. *Kolosova S.V., Sidorov M.V.* Primenenie metoda R-funkcij k raschetu ploskih techenij vjazkoj zhidkosti. Visnyk HNU im. V.N. Karazina. Ser. Matematyka, prykladna matematyka i mehanika. № 602, vyp. 53, 2003. S. 61-67.

3. *Ladyzhenskaja O.A.* Matematicheskie voprosy dinamiki vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti. М.: Nauka, 1970. 288 s.

4. *Landau L.D., Lifshic E.M.* Teoreticheskaja fizika. T. VI. Gidrodinamika. 3-e izd., ispr. М.: Nauka, 1986. 736 s.

5. *Lojczanskiy L.G.* Mehanika zhidkosti i gaza. М.: Drofa, 2003. 840 s.

6. *Mikhlin S.G.* Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike. М.: Nauka, 1970. 511 p.

7. *Rvachev V.L.* Teorija R-funkcij i nekotorye ejo prilozhenija. К.: Nauk. dumka, 1982. 552 p.

8. *Sidorov M.V.* O postroenii struktur reshenij zadachi Stoksa. Radioelektronika i informatika. 2002. №3. S. 52-54.

9. *Sidorov M.V.* Primenenie metoda R-funkcij k raschetu techenija Stoksa v kvadratnoj kaverne pri malom chisle Rejno'ldsa. Radioelektronika i informatika. 2002. № 4 (21). S. 77-78.

10. *Tevjashev A.D., Gibkina N.V., Sidorov M.V.* Ob odnom podhode k matematicheskomu modelirovaniju ploskih stacionarnyh techenij vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti v konechnyh odnosvjaznyh oblastjah. Radioelektronika i informatika. 2007. № 2 (37). S. 50-57.

11. *Burggraf O. R.* Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flow. J. Fluid Mech. 1966. V. 24. P. 113-151.

Поступила в редколлегию 12.06.2019

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. Литвин О.М. **Гибкіна Надія Валентинівна**, канд. техн. наук, доцент каф. прикладної математики ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, оптимальне управління та його застосування, математична фізика, актуарна та фінансова математика. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: nadiia.gybkina@nure.ua.

Сидоров Максим Вікторович, канд. фіз.-мат. наук, доцент каф. прикладної математики ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельні методи, математична фізика, теорія R-функцій та її застосування, стохастичний аналіз та його застосування. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: maxim.sidorov@nure.ua.

Шпакович Максим Олександрович, студент гр. ПМм-17-1 фак-ту інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельні методи, аналіз даних, математична статистика. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: maksym.shpakovych@nure.ua.

Gybkina Nadiia Valentynivna, Ph.D. in Technical Sciences, associate professor, associate professor of the Applied Mathematics Department, Kharkov National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, optimal control and its applications, mathematical physics, actuarial and financial mathematics. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057) 7021436. E-mail: nadiia.gybkina@nure.ua.

Sidorov Maxim Victorovich, Ph.D. in Physis and Maths, associate professor, associate professor of the Applied Mathematics Department, Kharkov National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, numerical analysis, mathematical physics, R-function's theory and its applications, stochastic analysis and its applications. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057) 7021436. E-mail: maxim.sidorov@nure.ua.

Shpakovych Maksym Oleksandrovych, student of group PMm-17-1 Faculty of Information and Analytical Technologies and Management, Kharkiv National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, numerical analysis, data analysis, mathematical statistics. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057) 7021436. E-mail: maksym.shpakovych@nure.ua.