СИСТЕМИ І ПРОЦЕСИ УПРАВЛІННЯ

УДК 519.632.4 : 517.927.4

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО ЗНАХОДЖЕННЯ ДОДАТНИХ РАДІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З МОНОТОННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

ПАРХОМЕНКО В.Г., СИДОРОВ М.В.

Для рівняння $-\Delta u = \lambda u^p$ розглядаються перша та третя крайові задачі і досліджуються питання існування їх радіально-симетричних додатних розв'язків, які можна отримати методом двобічних наближень. Робота методу двобічних наближень ілюструється низкою обчислювальних експериментів, у яких чисельно досліджується залежність розв'язку розглядуваних задач від параметрів λ і p.

Ключові слова: нелінійне еліптичне диференціальне рівняння, радіально-симетричний додатний розв'язок, двобічні наближення.

Key words: nonlinear elliptic differential equation, radial-symmetric positive solution, two-sided approximations.

Вступ

При математичному моделюванні, наприклад, процесів нелінійної теплопровідності необхідно розв'язати крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння вигляду

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)\,,\ \ \mathbf{x} \in \Omega\,.$$

У випадку, коли Ω – куля радіуса R у $\sim^3$, можна поставити задачу відшукати радіально-симетричний (тобто залежний лише від $r = |\mathbf{x}|$) розв'язок вказаного рівняння. При цьому ми приходимо до задачі розв'язання крайової задачі для нелінійного звичайного диференціального рівняння.

Точні розв'язки крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь можна отримати лише у деяких поодиноких випадках, тому для розв'язання таких задач зазвичай використовуються чисельні методи. Серед них можна виділити, зокрема, сіткові, варіаційні та ітераційні методи [1]. Ітераційні методи є найбільш привабливими з точки зору зручності обчислювальної реалізації та завдяки наявності властивості самовиправності. Особливе місце серед ітераційних методів належить двобічним методам. Методи двобічних наближень є універсальним інструментом як при дослідженні питань існування та єдиності розв'язків операторних рівнянь, так і для фактичного їх знаходження. При цьому двобічні наближення дають верхню та нижню оцінку розв'язку на кожній ітерації, а отже, пропонують зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Двобічні ітераційні методи засновані на використанні теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах. До розв'язання крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь вони були застосовані, наприклад, у роботах [2 – 5, 9, 10], але задачі знаходження радіально-симетричних розв'язків не розглядалися.

Отже, вдосконалення існуючих методів двобічних наближень у частині їх застосування до задачі знаходження додатних радіально-симетричних розв'язків напівлінійних еліптичних рівнянь є актуальною науковою задачею.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у роботах [2, 9], і розповсюджує їх на треті крайові задачі та на звичайні диференціальні рівняння з вироджуваним оператором.

1. Мета та задачі дослідження

Метою роботи є вдосконалення існуючих методів двобічних наближень у частині їх застосування до знаходження додатних радіально-симетричних розв'язків крайових задач першого та третього типів у випадку ізотонної степеневої нелінійності у правій частині диференціального рівняння. Для досягнення поставленої мети необхідно:

– для знаходження радіально-симетричного розв'язку отримати крайову задачу для звичайного диференціального рівняння;

– методом функцій Гріна звести отриману крайову задачу до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна і дослідити властивості відповідного нелінійного оператора;

– побудувати метод двобічних наближень знаходження розв'язку інтегрального рівняння Гаммерштейна і отримати умови існування єдиного додатного радіально-симетричного розв'язку розглядуваних крайових задач;

– провести обчислювальні експерименти для тестових задач.

2. Постановка задачі

У кулі $\Omega = \{\mathbf{x} \in \sim^2 : |\mathbf{x}| < R\}$ розглядатимемо рівняння нелінійної стаціонарної теплопровідності

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)\,,\ \ \mathbf{x} \in \Omega\,, \tag{1}$$

з двома типами крайових умов:

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0\,, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}+hu\right|_{\partial\Omega}=0\,. \qquad (3)$$

Одним з типових випадків залежності функції щільності теплових джерел від температури є степенева залежність вигляду $f(\mathbf{x},u)=\lambda u^p$ ($p>0$, $\lambda>0$).

Ставиться задача знаходження додатного радіально-симетричного (тобто залежного лише від $r=|\mathbf{x}|$) розв'язку крайових задач (1), (2) та (1), (3) для $f(\mathbf{x},u)=\lambda u^p$.

3. Метод двобічних наближень

Застосуємо до розв'язання задачі (5), (6) метод двобічних наближень, заснований на використанні методів теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах [6, 7].

Отже, у одиничній кулі

$$\Omega=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:|\mathbf{x}|<1\}$$

розглядатимемо нелінійне еліптичне диференціальне рівняння вигляду (1) із правою частиною $f(\mathbf{x},u)=\lambda u^p$ ($\lambda>0$, $p>0$), тобто розглядатимемо рівняння

$$-\Delta u=\lambda u^p,\ \mathbf{x}\in\Omega\,. \qquad (4)$$

У сферичній системі координат, яка вводиться за формулами

$$x_1=r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$x_2=r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$x_3=r\cos\theta,$$

$$0\le\varphi<2\pi,\ 0\le\theta\le\pi,\ r\ge 0,$$

оператор Лапласа матиме вигляд

$$\Delta u=$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\,.$$

Якщо розв'язок крайової задачі має радіальну симетрію, то його значення в будь-якій точці $\mathbf{x}\in\Omega$ залежить лише від віддалення цієї точки від початку координат. З цього випливає, що функція u залежить тільки від змінної $r=|\mathbf{x}|$, де $|\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$. Тоді (4) стає звичайним диференціальним рівнянням вигляду

$$-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=\lambda u^p,$$

або

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=\lambda r^2u^p, \qquad (5)$$

де $r=|\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ – відстань від точки до початку координат.

Крайові умови (2), (3), що були задані на сфері $|\mathbf{x}|=1$, відповідно приводять до наступних крайових умов для функції $u=u(r)$ при $r=1$:

$$u(1)=0\,,$$

$$u'(1)+hu(1)=0\,.$$

Точка $r=0$ є особливою точкою диференціального рівняння (5), тому для функції $u=u(r)$ при $r=0$ треба поставити умову обмеженості:

$$|u(0)|<+\infty\,.$$

Отже, проблема знаходження додатних радіально-симетричних розв'язків рівняння (1) за крайових умов (2) чи (3) зводиться відповідно до наступних двох крайових задач:

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=\lambda r^2u^p,\ r\in(0,1)\,, \qquad (6)$$

$$|u(0)|<+\infty,\ u(1)=0\,, \qquad (7)$$

і

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=\lambda r^2u^p,\ r\in(0,1)\,, \qquad (8)$$

$$|u(0)|<+\infty,\ u'(1)+hu(1)=0\,. \qquad (9)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння $-\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=0$ має вигляд

$$u(r)=\frac{C_1}{r}+C_2\,.$$

Умова обмеженості $|u(0)|<+\infty$ буде виконана, якщо обрати $C_1=0$, $C_2=1$, тобто умові при $r=0$ задовольнятиме частинний розв'язок $u_1(r)=1$.

Крайовій умові $u(1)=0$ задовольнятиме частинний розв'язок $u_2(r)=\frac{1-r}{r}$, а крайовій умові $u'(1)+hu(1)=0$ – частинний розв'язок $u_2(r)=\frac{h-hr+r}{r}$. Визначники Вронського цих пар функцій відповідно дорівнюють

$$|W(r)|=\begin{vmatrix}u_1(r) & u_2(r)\\ u_1'(r) & u_2'(r)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \frac{1-r}{r}\\ 0 & -\frac{1}{r^2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{r^2}\,,$$

$$|W(r)|=\begin{vmatrix}u_1(r) & u_2(r)\\ u_1'(r) & u_2'(r)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \frac{h-hr+r}{r}\\ 0 & -\frac{h}{r^2}\end{vmatrix}=-\frac{h}{r^2}\,.$$

Отже, функції Гріна крайових задач (6), (7) і (8), (9) матимуть вигляд

$$G(r,s) = -\begin{cases} \dfrac{u_1(r)u_2(s)}{s^2\left|W(s)\right|}, & 0 \le r \le s, \\ \dfrac{u_1(s)u_2(r)}{s^2\left|W(s)\right|}, & s < r \le 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-s}{s}, & 0 \le r \le s, \\ \dfrac{1-r}{r}, & s < r \le 1, \end{cases} \qquad (10)$$

$$G(r,s) = -\begin{cases} \dfrac{u_1(r)u_2(s)}{s^2\left|W(s)\right|}, & 0 \le r \le s, \\ \dfrac{u_1(s)u_2(r)}{s^2\left|W(s)\right|}, & s < r \le 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{h-hs+s}{hs}, & 0 \le r \le s, \\ \dfrac{h-hr+r}{hr}, & s < r \le 1. \end{cases} \qquad (11)$$

Тоді кожна з задач (6), (7) і (8), (9) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \lambda\int_0^1 Q(r,s)u^p(s)ds\,, \qquad (12)$$

де $Q(r,s) = s^2 G(r,s)$.

Означення. Узагальненим розв'язком крайової задачі (6), (7) чи (8), (9) називатимемо функцію $u^* \in C[0,1]$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (12).

У сенсі означення і розумітимемо еквівалентність крайових задач (6), (7) чи (8), (9) та інтегрального рівняння (12).

З рівнянням (12) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор, що діє у $C[0,1]$ за правилом

$$T(u)(r) = \int_0^1 Q(r,s)u^p(s)ds\,. \qquad (13)$$

Тоді рівняння (12) запишеться у вигляді $u = \lambda T(u)$. Це рівняння розглядатимемо у банаховому просторі $C[0,1]$, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних у $C[0,1]$ функцій.

Вивчимо властивості оператора T.

Очевидно, що функції $Q(r,s) = s^2 G(r,s)$ для кожної з функцій Гріна (10) і (11) неперервні та невід'ємні при $r, s \in [0,1]$.

Оскільки $Q(r,s)u^p(s) \ge 0$ для всіх $p > 0$ і $r, s \in [0,1]$, то $T(u)\,\text{Е}\,\theta$ для всіх $u\,\text{Е}\,\theta$, а отже, оператор T є додатним.

Оскільки $u_1^p \ge u_2^p$, якщо $u_1 \ge u_2$ і $p > 0$, і функція $Q(r,s)$ є невід'ємною, то для всіх $r \in [0,1]$ $\int_0^1 Q(r,s)u_1^p(s)ds \ge \int_0^1 Q(r,s)u_2^p(s)ds$, а отже, з нерівності $u_1\,\text{Е}\,u_2$ випливає нерівність $T(u_1)\,\text{Е}\,T(u_2)$, тобто оператор T при $p > 0$ є ізотонним.

Нехай $u_0(r) = \int_0^1 Q(r,s)ds$. Для функції Гріна (10) $u_0(r) = \dfrac{1-r^2}{6}$, а для функції Гріна (11) $u_0(r) = \dfrac{2+h(1-r^2)}{6h}$.

У випадку функції Гріна вигляду (10) має місце оцінка

$$\varphi(s)u_0(r) \le Q(r,s) \le \psi(s)u_0(r)\,, \qquad (14)$$

де $\varphi(s) = \min\left\{\dfrac{6s(1-s)}{1+s}, 3s^2\right\}$, $\psi(s) = \dfrac{6s}{1+s}$ – неперервні та невід'ємні при $s \in [0,1]$ функції, а у випадку функції Гріна вигляду (11) має місце оцінка

$$\varphi(s)u_0(r) \le Q(r,s) \le \psi(s)u_0(r)\,, \qquad (15)$$

де $\varphi(s) = \dfrac{6s^3}{2+h}$, $\psi(s) = \dfrac{6s(h-hs+s)}{2+h(1-s^2)}$ – неперервні та невід'ємні при $s \in [0,1]$ функції.

З нерівностей (14) і (15) випливає, що для будь-якої $u \in C[0,1]$ має місце нерівність:

$$\alpha u_0(r) \le \int_0^1 Q(r,s)u(s)ds \le \beta u_0(r)\,, \qquad (16)$$

де $\alpha = \alpha(u) = \int_0^1 \varphi(s)u(s)ds$, $\beta = \beta(u) = \int_0^1 \psi(s)u(s)ds$.

Нерівність (16) свідчить про u_0-обмеженість лінійного оператора $\int_0^1 Q(r,s)u(s)ds$.

Дослідимо оператор T вигляду (13) на угнутість та u_0-увігнутість з функцією $u_0(r) = \dfrac{1}{6}(1-r^2)$ для випадку крайових умов (7) і функцією $u_0(r) = \dfrac{2+h(1-r^2)}{6h}$ для випадку крайових умов (9).

Для будь-якої $u \in C[0,1]$ має місце нерівність

$$\alpha u_0(r) \le \int_0^1 Q(r,s)u^p(s)ds \le \beta u_0(r)\,, \qquad (17)$$

де $\alpha = \alpha(u) = \int_0^1 \varphi(s)u^p(s)ds$, $\beta = \beta(u) = \int_0^1 \psi(s)u^p(s)ds$, тобто $T(u) \in K(u_0)$.

Нехай $u \in K_+$ таке, що $\alpha_1 u_0\,\text{Д}\,u\,\text{Д}\,\beta_1 u_0$

($\alpha_1=\alpha_1(u)>0$, $\beta_1=\beta_1(u)>0$). Розглянемо при $\tau\in(0,1)$ нерівність $T(\tau u)>\tau T(u)$. Оскільки

$$T(\tau u)-\tau T(u)=\tau^p\int_0^1 Q(r,s)u^p(s)ds-\tau\int_0^1 Q(r,s)u^p(s)ds=$$

$$=(\tau^p-\tau)\int_0^1 Q(r,s)u^p(s)ds,$$

то нерівність $T(\tau u)>\tau T(u)$ буде виконано, якщо $\tau^p-\tau>0$, тобто (з урахуванням умови $\tau\in(0,1)$) якщо $p\in(0,1)$.

Отже, за умови $p\in(0,1)$ оператор T є увігнутим.

Доведемо, що за умови $p\in(0,1)$ оператор T також буде і u_0-увігнутим.

Нехай $u\in K(u_0)$, $\tau\in(0,1)$ і $p\in(0,1)$. Тоді з урахуванням нерівності (17)

$$T(\tau u)-\tau T(u)=\int_0^1 Q(r,s)(\tau^p-\tau)u^p(s)ds\ge\alpha u_0(r),$$

де $\alpha=\alpha(u)=\int_0^1\varphi(s)(\tau^p-\tau)u^p(s)ds>0$.

З іншого боку, відповідно до нерівності (16), має місце оцінка

$$\int_0^1 Q(r,s)u^p(s)ds\le\beta u_0(x),$$

де $\beta=\beta(u)=\int_0^1\psi(s)u^p(s)ds>0$. Тоді

$$\int_0^1 Q(r,s)\tau^p u^p(s)ds\ge\tau\int_0^1 Q(r,s)u^p(s)ds+\alpha u_0(x)\ge$$

$$\ge\tau\int_0^1 Q(r,s)u^p(s)ds+\frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 Q(r,s)u^p(s)ds=$$

$$=\tau\left(1+\frac{\alpha}{\beta\tau}\right)\int_0^1 Q(r,s)u^p(s)ds,$$

або

$$T(\tau u)\,E\,\tau(1+\eta)T(u),$$

де $\eta=\eta(u,\tau)=\dfrac{\alpha}{\beta\tau}>0$.

Отже, оператор T є u_0-увігнутим.

Лема. Оператор T, що діє за правилом (13), розглядуваний для кожної з крайових задач (6), (7) і (8), (9), має такі властивості:

а) є додатним оператором;

б) є ізотонним оператором при $p>0$;

в) є u_0-увігнутим при $p\in(0,1)$, де $u_0(r)=\dfrac{1}{6}(1-r^2)$ для задачі (6), (7) і $u_0(r)=\dfrac{2+h(1-r^2)}{6h}$ для задачі (8), (9).

Оскільки оператор T перетворює конус K_+ в $K(u_0)$, то кінці інваріантного конусного відрізку $<v_0,w_0>$ для оператора $T_\lambda=\lambda T$ шукатимемо у вигляді

$$v_0=\alpha u_0,\ w_0=\beta u_0.$$

Тоді умови, що визначають кінці інваріантного конусного відрізка, приводять до таких нерівностей для визначення сталих α і β ($0<\alpha<\beta$):

$$\alpha u_0(r)\le\lambda\alpha^p\int_0^1 Q(r,s)u_0^p(s)ds \text{ для всіх } r\in[0,1],\quad(18)$$

$$\beta u_0(r)\ge\lambda\beta^p\int_0^1 Q(r,s)u_0^p(s)ds \text{ для всіх } r\in[0,1].\quad(19)$$

Нерівності (18), (19) можуть бути зведені до вигляду

$$\alpha^{1-p}\le\lambda m,\ \beta^{1-p}\ge\lambda M,\quad(20)$$

де

$$m=\min_{r\in[0,1]}\int_0^1\frac{Q(r,s)}{u_0(r)}u_0^p(s)ds,\ M=\max_{r\in[0,1]}\int_0^1\frac{Q(r,s)}{u_0(r)}u_0^p(s)ds.$$

Для крайової задачі (6), (7) знаходимо, що

$$m=\frac{3^{1-p}}{2^{2+p}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+p\right)},$$

$$M=\frac{3^{1-p}}{2^{1+p}}\left(\frac{2}{1+p}-\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+p\right)}\right),$$

а для крайової задачі (8), (9)

$$m=\frac{3^{1-p}}{2^p h^{2+p}(1+2p)(3+2p)}\times$$

$$\times\left\{(2+h)^{p+2}F\left(-\frac{1}{2},-p,\frac{1}{2};\frac{h}{2+h}\right)-2^{2+p}(1+h+hp)\right\},$$

$$M=\frac{2\cdot3^{1-p}[h^2-4(1+p)-4hp(1+p)]}{h^{2+p}(2+h)(1+p)(1+2p)(3+2p)}+\frac{3^{1-p}(2+h)^p}{2^p h^p(1+p)}-$$

$$-\frac{3^{1-p}2^{1-p}(h-1)(2+h)^{p+1}F\left(-\frac{1}{2},-p,\frac{1}{2};\frac{h}{2+h}\right)}{h^{2+p}(1+2p)(3+2p)},$$

де $\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}dt$ – гамма-функція Ейлера;

$F(a,b,c;z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(a+k)(b+k)}{(1+k)(c+k)}\right]z^n$ – гіпергеометрична функція.

Зауважимо, що гіпергеометрична функція має інтегральне подання

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\, dt .$$

Тоді з нерівностей (20) знаходимо, що

$$\alpha \le (\lambda m)^{\frac{1}{1-p}}, \ \beta \ge (\lambda M)^{\frac{1}{1-p}} . \qquad (21)$$

Оскільки для більш швидкої збіжності двобічних ітерацій слід взяти найбільше значення α і найменше значення β, що задовольняють нерівності (21), то остаточно матимемо, що для кінців $v_0 = \alpha u_0$, $w_0 = \beta u_0$ інваріантного конусного відрізка слід обрати значення

$$\alpha = (\lambda m)^{\frac{1}{1-p}}, \ \beta = (\lambda M)^{\frac{1}{1-p}} ,$$

при цьому, очевидно, виконується умова $0 < \alpha < \beta$.

Для кожної з крайових задач (6), (7) і (8), (9) сформуємо ітераційний процес за формулами

$$v^{(n)}(r) = \lambda \int_0^1 Q(r,s)[v^{(n-1)}(s)]^p ds , \ n = 1, 2, ... , \quad (22)$$

$$w^{(n)}(r) = \lambda \int_0^1 Q(r,s)[w^{(n-1)}(s)]^p ds , \ n = 1, 2, ... , \quad (23)$$

$$v^{(0)}(r) = \alpha u_0(r) , \ w^{(0)}(r) = \beta u_0(r) . \qquad (24)$$

З огляду на властивості оператора T можна зробити висновок, що ітераційний процес (22) – (24) двобічно збігається до єдиного у конусі K_+ додатного розв'язку u^* крайової задачі (6), (7) чи (8), (9). А саме мають місце такі твердження.

Теорема 1. *Нехай*

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \sim^3 : |\mathbf{x}| < 1\}$$

– одинична куля у $\sim^3$. *Крайова задача*

$$-\Delta u = \lambda u^p , \ \mathbf{x} \in \Omega ,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0 ,$$

при $\lambda > 0$, $p \in (0; 1)$ *має єдиний додатний радіально-симетричний розв'язок*

$$u^*(r) = u^*(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) ,$$

до якого двобічно збігаються послідовні наближення, які формуються за схемою

$$v^{(n)}(r) = \lambda \int_0^1 Q(r,s)[v^{(n-1)}(s)]^p ds , \ n = 1, 2, ... ,$$

$$w^{(n)}(r) = \lambda \int_0^1 Q(r,s)[w^{(n-1)}(s)]^p ds , \ n = 1, 2, ... ,$$

$$v^{(0)}(r) = \alpha u_0(r) , \ w^{(0)}(r) = \beta u_0(r) ,$$

де

$$Q(r, s) = \begin{cases} s(1-s), & 0 \le r \le s, \\ \dfrac{s^2(1-r)}{r}, & s < r \le 1, \end{cases}$$

$$u_0(r) = \frac{1}{6}(1-r^2) ,$$

$$\alpha = (\lambda m)^{\frac{1}{1-p}}, \ \beta = (\lambda M)^{\frac{1}{1-p}} ,$$

$$m = \frac{3^{1-p}}{2^{2+p}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+p\right)} ,$$

$$M = \frac{3^{1-p}}{2^{1+p}} \left(\frac{2}{1+p} - \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+p\right)} \right) .$$

Теорема 2. *Нехай*

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \sim^3 : |\mathbf{x}| < 1\}$$

– одинична куля у $\sim^3$. *Крайова задача*

$$-\Delta u = \lambda u^p , \ \mathbf{x} \in \Omega ,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + hu\right|_{\partial\Omega} = 0$$

при $\lambda > 0$, $p \in (0; 1)$ *має єдиний додатний радіально-симетричний розв'язок*

$$u^*(r) = u^*(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) ,$$

до якого двобічно збігаються послідовні наближення, які формуються за схемою

$$v^{(n)}(r) = \lambda \int_0^1 Q(r,s)[v^{(n-1)}(s)]^p ds , \ n = 1, 2, ... ,$$

$$w^{(n)}(r) = \lambda \int_0^1 Q(r,s)[w^{(n-1)}(s)]^p ds , \ n = 1, 2, ... ,$$

$$v^{(0)}(r) = \alpha u_0(r) , \ w^{(0)}(r) = \beta u_0(r) ,$$

де

$$Q(r, s) = \begin{cases} \dfrac{s(h-hs+s)}{h}, & 0 \le r \le s, \\ \dfrac{s^2(h-hr+r)}{hr}, & s < r \le 1. \end{cases}$$

$$u_0(r) = \frac{2 + h(1-r^2)}{6h} ,$$

$$\alpha = (\lambda m)^{\frac{1}{1-p}}, \ \beta = (\lambda M)^{\frac{1}{1-p}} ,$$

$$m = \frac{3^{1-p}}{2^p h^{2+p}(1+2p)(3+2p)} \times$$

$$\times \left\{ (2+h)^{p+2} F\left(-\frac{1}{2}, -p, \frac{1}{2}; \frac{h}{2+h}\right) - 2^{2+p}(1+h+hp) \right\} ,$$

$$M = \frac{2 \cdot 3^{1-p}[h^2 - 4(1+p) - 4hp(1+p)]}{h^{2+p}(2+h)(1+p)(1+2p)(3+2p)} + \frac{3^{1-p}(2+h)^p}{2^p h^p (1+p)} -$$

$$-\frac{3^{1-p}2^{1-p}(h-1)(2+h)^{p+1}F\left(-\frac{1}{2},-p,\frac{1}{2};\frac{h}{2+h}\right)}{h^{2+p}(1+2p)(3+2p)}.$$

Двобічна збіжність послідовних наближень (22) – (24) розуміється у сенсі виконання нерівностей

$$\alpha u_0 = v^{(0)} \text{ Д } v^{(1)} \text{ Д} \ldots \text{Д } v^{(n)} \text{ Д} \ldots \text{Д } u^{*} \text{ Д}$$

$$\text{Д} \ldots \text{Д } w^{(n)} \text{ Д} \ldots \text{Д } w^{(1)} \text{ Д } w^{(0)} = \beta u_0 .$$

4. Результати обчислювального експерименту

Обчислювальний експеримент було проведено для задач (6), (7) і (8), (9) при $p = 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots;\ 0{,}9$ та $\lambda = 1,\ 2,\ 3$ (у задачі (8), (9) було обрано $h = 5$).

Для задачі (6), (7) при $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ збіжність з точністю 10^{-4} було досягнуто за 7 ітерацій. Знайдено, що

$$m = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{3}{2}}\pi,\ M = \frac{16-3\pi}{8\sqrt{6}},$$

$$\alpha = m^2 = \frac{3\pi^2}{512},\ \beta = M^2 = \frac{(16-3\pi)^2}{384}.$$

На рис. 1 наведено графіки верхніх $w^{(n)}(r)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(n)}(r)$ (пунктирна лінія) наближень. На рис. 2 наведено графік наближеного розв’язку $u^{(7)}(r)$, а на рис. 3 – поверхні рівня функції $u^{(7)}(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})$. На рис. 4 наведено графіки залежності $\|u\|$ від $p \in (0,\ 1)$ для значень $\lambda = 1,\ 2,\ 3$.

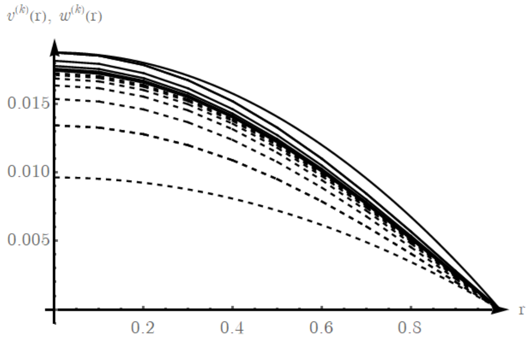

Рис. 1. Графіки $w^{(k)}(r)$ і $v^{(k)}(r)$, $k = \overline{0,7}$

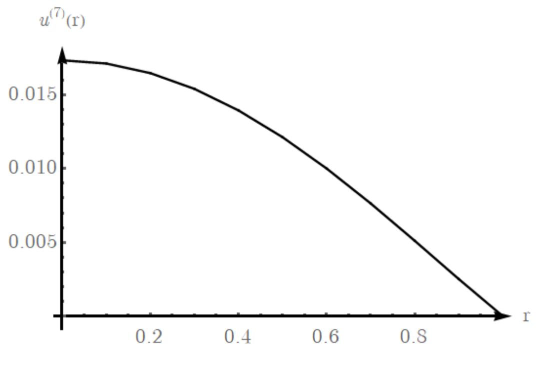

Рис. 2. Графік $u^{(7)}(r)$

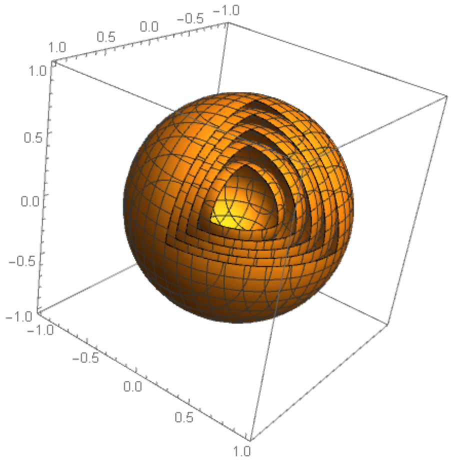

Рис. 3. Поверхні рівня функції $u^{(7)}(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})$

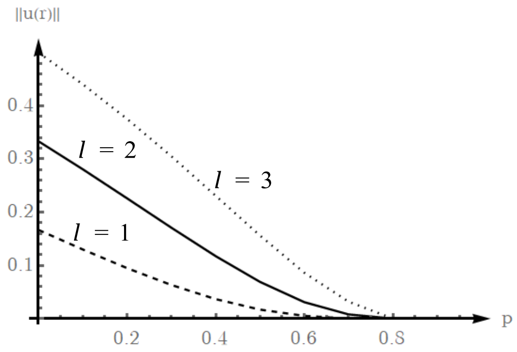

Рис. 4. Значення норми наближеного розв’язку залежно від параметра p ($\lambda = 1,\ 2,\ 3$)

Для задачі (8), (9) при $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$, $h = 5$ збіжність з точністю 10^{-4} було досягнуто за 7 ітерацій. Знайдено, що

$$m = \frac{1}{400} 6\sqrt{15} + 49\sqrt{10}\arcsin\sqrt{\frac{5}{7}},$$

$$M = \sqrt{\frac{14}{15}} - \frac{29}{35\sqrt{15}} - \frac{7}{25}\sqrt{\frac{3}{2}}\arcsin\sqrt{\frac{5}{7}},$$

$$\alpha = \frac{3\left(30+49\sqrt{10}\arcsin\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^2}{800000},$$

$$\beta = \frac{\left(145\sqrt{2}-350\sqrt{7}+147\sqrt{5}\arcsin\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^2}{918750}.$$

На рис. 5 наведено графіки верхніх $w^{(n)}(r)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(n)}(r)$ (пунктирна лінія) наближень. На рис. 6 наведено графік наближеного розв’язку $u^{(6)}(r)$, а на рис. 7 – поверхні рівня функції $u^{(6)}(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})$. На рис. 8 наведено графіки залежності $\|u\|$ від $p \in (0,\ 1)$ для значень $\lambda = 1,\ 2,\ 3$.

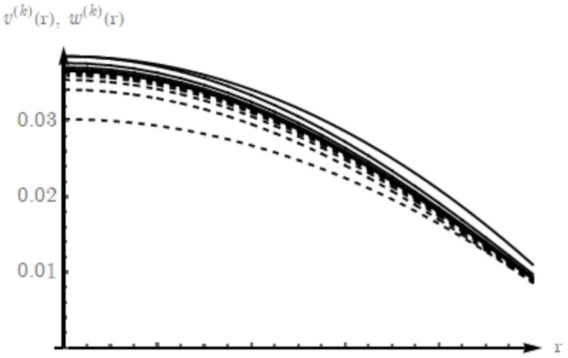

Рис. 5. Графіки $w^{(k)}(r)$ і $v^{(k)}(r)$, $k=\overline{0,6}$

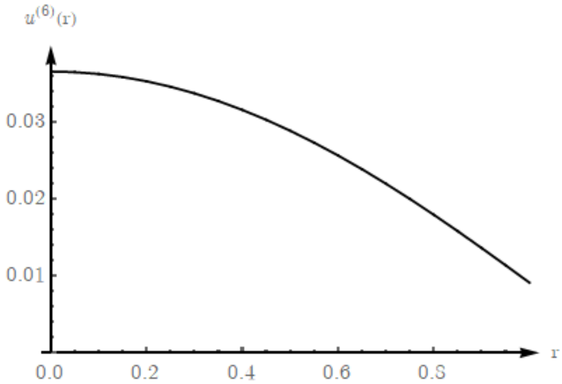

Рис. 6. Графік $u^{(6)}(r)$

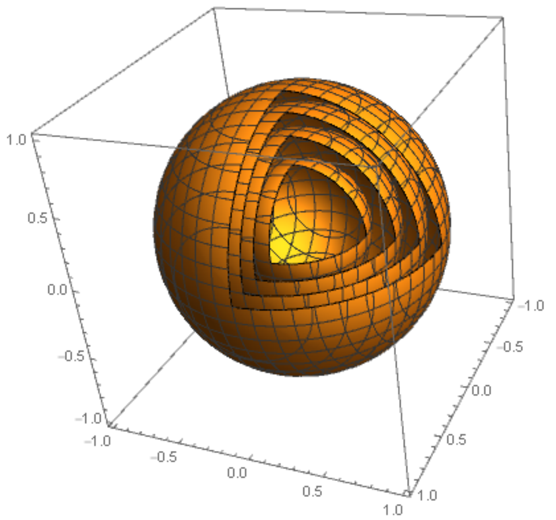

Рис. 7. Поверхні рівня функції $u^{(6)}(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})$

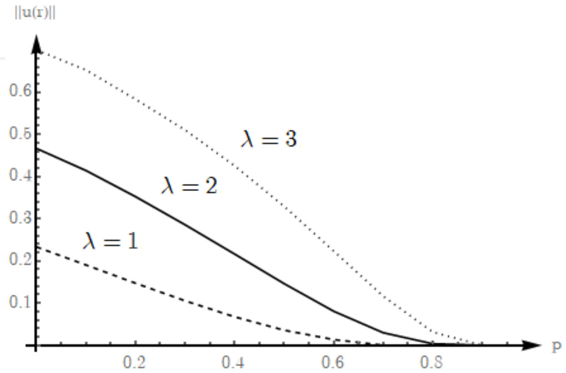

Рис. 8. Значення норми наближеного розв'язку залежно від параметра p ($\lambda = 1, 2, 3$)

Як бачимо, і у випадку задачі (6), (7), і у випадку задачі (8), (9) зі збільшенням λ та з наближенням p до 1 норма розв'язку відповідних задач прямує до нуля.

Попередні результати роботи було представлено на 23-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 16-18 квітня 2019 р.) [8].

Висновки

Отримали подальший розвиток двобічні методи розв'язання задач математичної фізики у частині їх застосування до знаходження радіально-симетричних розв'язків першої та третьої крайових задач для рівняння $-\Delta u = \lambda u^p$. Отримані у роботі результати можна розповсюдити на рівняння з іншими типами нелінійностей та на більш загальні еліптичні рівняння, а також застосувати до розв'язання прикладних задач, пов'язаних з розрахунком фізико-механічних полів. Це і визначає наукову новизну та практичну значущість отриманих у роботі результатів.

Література: **1.** *Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П.* Методы решения задач математической физики / Под ред. Г.И. Марчука. М.: Физматлит, 2002. 320 с. **2.** *Вороненко М.Д., Сидоров М.В.* Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 1 (80). С. 48-54. **3.** *Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В.* О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107-120. **4.** *Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В.* О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2013. № 1. С. 35-42. **5.** *Колосова С.В., Сидоров М.В.* Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью // Радиоэлектроника и информатика. 2013. № 3 (62). С. 28-31. **6.** *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 394 с. **7.** *Опойцев В.И., Хуродзе Т.А.* Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с. **8.** *Пархоменко В.Г.* Метод двобічних наближень пошуку вісесиметричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями // 23-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті»: зб. матеріалів форуму (м. Харків, 16-18 квітня 2019 р.). Т. 7. Харків: ХНУРЕ, 2019. С. 120-121. **9.** *Сидоров М.В.* Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2019. № 1 (48). С. 57-66. **10.** *Kolosova S.V.*, *Lukhanin V.S.*, *Sidorov M.V.* On positive solutions of Liouville-Gelfand problem // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. 2018. № 3 (99). С. 78-91.

Transliterated bibliography:

1. *Agoshkov V.I.*, *Dubovskij P.B.*, *Shutjaev V.P.* Metody reshenija zadach matematicheskoj fiziki / pod red. G.I. Marchuka. M.: Fizmatlit, 2002. 320 s.

2. *Voronenko M.D.*, *Sidorov M.V.* Konstruktyvne doslidzhennja nelinijnyh krajovyh zadach dlja zvychajnyh dyferencial'nyh rivnjan' // Radiojelektronika i informatika. 2018. № 1 (80). S. 48-54.

3. *Kolosova S.V.*, *Luhanin V.S.*, *Sidorov M.V.* O postroenii dvustoronnih priblizhenij k polozhitel'nomu resheniju uravnenija Lane-Jemdena // Visnyk Zaporiz'kogo nacional'nogo universytetu. Serija: fizyko-matematychni nauky. 2015. № 3. S. 107-120.

4. *Kolosova S.V.*, *Luhanin V.S.*, *Sidorov M.V.* O postroenii iteracionnyh metodov reshenija kraevyh zadach dlja neli-nejnyh jellipticheskih uravnenij // Visnyk Zaporiz'kogo nacional'nogo universytetu. Serija: fizyko-matematychni nauky. 2013. № 1. C. 35-42.

5. *Kolosova S.V.*, *Sidorov M.V.* Primenenie iteracionnyh metodov k resheniju jellipticheskih kraevyh zadach s jeksponencial'noj nelinejnost'ju // Radiojelektronika i informatika. 2013. № 3 (62). S. 28-31.

6. *Krasnosel'skij M.A.* Polozhitel'nye reshenija operatornyh uravnenij. M.: Fizmatgiz, 1962. 394 s.

7. *Opojcev V.I.*, *Hurodze T.A.* Nelinejnye operatory v prostranstvah s konusom. Tbilisi: Izd-vo Tbilis. un-ta, 1984. 246 s.

8. *Parkhomenko V.G.* Metod dvobichnyh nablyzhen' poshuku visesymetrychnyh rozv'jazkiv krajovyh zadach z monotonnymy nelinijnostjamy // 23-j Mizhnarodnyj molodizhnyj forum «Radioelektronika ta molod' u HHI stolitti»: zb. materialiv forumu (m. Harkiv, 16-18 kvitnja 2019 r.). T. 7. Harkiv: HNURE, 2019. S. 120-121.

9. *Sidorov M.V.* Metod dvobichnyh nablyzhen' rozv'jazannja pershoi' krajovoi' zadachi dlja nelinijnyh zvychajnyh dyferencial'nyh rivnjan' na osnovi vykorystannja funkcii' Grina // Radioelektronika, informatyka, upravlinnja. 2019. № 1 (48). S. 57-66.

10. *Kolosova S.V.*, *Lukhanin V.S.*, *Sidorov M.V.* On positive solutions of Liouville-Gelfand problem // Vestnik KazNU. Serija matematika, mehanika, informatika. 2018. № 3 (99). C. 78-91.

Надійшла до редколлегії 12.09.2019

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. Литвин О.М.

Пархоменко Владислав Геннадійович, студент гр. ПМм-19-1 фак-ту інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельний аналіз. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: vladyslav.parkhomenko1@nure.ua.

Сидоров Максим Вікторович, канд. фіз.-мат. наук, доцент каф. прикладної математики ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельні методи, математична фізика, теорія *R*-функцій та її застосування, стохастичний аналіз та його застосування. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: maxim.sidorov@nure.ua.

Parkhomenko Vladyslav Gennadijovych, student of group PMm-19-1 Faculty of Information and Analytical Technologies and Management, Kharkiv National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, numerical analysis. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057) 7021436. E-mail: vladyslav.parkhomenko1@nure.ua.

Sidorov Maxim Victorovich, PhD in Physis and Maths, associate professor, associate professor of the Applied Mathematics Department, Kharkov National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, numerical analysis, mathematical physics, R-function's theory and its applications, stochastic analysis and its applications. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057) 7021436. E-mail: maxim.sidorov@nure.ua.