УДК 681. 325

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ІМПУЛЬСНИХ ПОТОКІВ В АПАРАТНИХ ОБЧИСЛЮВАЧАХ МАТЕМАТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

ЛАРЧЕНКО Л.В., КУЛАК Е.М., ЛАРЧЕНКО Б.Д.

Пропонується та досліджується метод ступінчастої апроксимації відтворення висхідних та спадних безперервних функцій визначеного класу, оптимальний з точки зору точності та часу обчислення. Це забезпечує в спеціалізованих обчислювачах єдиний підхід до формування цілочисельних значень однаково обмежених функцій, аргумент яких представлений імпульсним потоком.

Ключові слова: функціональне перетворення, обчислення, метод, апроксимація, імпульсний потік, біт-потокові дані, одиничний імпульс, вибірка, абсолютна похибка.

Key words: functional conversion, computing, method, approximation, pulse stream, bit-stream data, single pulse, sample, absolute error.

1. Вступ

При розробці систем, орієнтованих на наскрізні технології інтелектуальних сенсорів, інтернет речей, а також на удосконалення інтерфейсів взаємодії між людиною і комп'ютером, ставиться завдання узгодження сенсорів з цифровими системами збору і обробки інформації [1].

На даний момент актуальним завданням для реалізації систем, що приймають інформацію від великої кількості різнорідних сенсорів, є розробка архітектур потокових процесорів, що складаються з типового процесорного ядра і зовнішніх апаратних модулів потокової обробки. Основна мета розвитку подібних архітектур пов'язана зі спрощенням взаємодії компонентів, зокрема з використанням послідовної передачі даних імпульсними (бітовими) потоками. При цьому біт-потокові пристрої складають елементну базу зовнішніх апаратних модулів децентралізованих систем, що працюють з потоковими формами.

Дані, одержувані від різнорідних сенсорів, обробляються в паралельно працюючих каналах і далі передаються в обчислювальне ядро. При цьому застосовуються потокові форми представлення даних [1]. Інформаційні потоки формуються з елементарних інформаційних одиниць, які залежно від базової реалізації можуть мати різну матеріальну сутність. Як базова сутність фізичного носія біт-потокових даних можуть виступати електричні, оптичні, пневматичні, біологічні та інші сигнали. В електричних схемах як носій виступають електричні імпульси, на основі яких формуються потоки одиничних імпульсів і потоки широтно-імпульсно-модульованих сигналів [1]. Перетворення часових інтервалів в цифрову величину шляхом їх заповнення імпульсами опорної частоти називається час-імпульсним перетворенням. При цьому, інформаційну функцію виконують тимчасові характеристики прямокутних одиничних імпульсів.

Потокові способи передачі та обробки інформації характеризуються:

– можливістю реалізації перетворення за рахунок використання методів формування приростів і послідовної обробки потоків у міру надходження одиничних імпульсів;

– високою завадостійкістю, обумовленою непозиційністю і ваговою рівнозначністю одиничних імпульсів [2].

В потокових формах інформація пов'язується з кількістю імпульсів, що проходять в потоці за одиницю часу, або з відносною тривалістю одиничного значення біта. При цьому біт-потокові представлення не використовують безпосереднього кодування, як це прийнято при цифровій обробці інформації в типових інтерфейсах [2].

Функціональне перетворення біт-потоків є поширеним завданням, що застосовується в системах управління, моделювання, контролю, в інформаційно-вимірювальних системах та пристроях. При проведенні математичної обробки первинної вимірювальної інформації, що отримують з вимірювальних сенсорів, поряд з арифметичними, алгебраїчними та іншими операціями часто потрібне виконання різних нелінійних (функціональних) перетворень імпульсних потоків.

Функціональне перетворення здійснюється при виконанні завдань лінеаризації і масштабування сигналів, що отримують від сенсорів, при вирішенні завдань непрямого вимірювання, при отриманні коригувальних сигналів у системах управління, при отриманні нелінійних математичних залежностей вихідних сигналів, при здійсненні типових процедур статистичної обробки вимірюваної інформації. В обчислювальних системах і пристроях функціональне перетворення в ряді випадків реалізується автономно, наприклад, при виконанні операцій множення-ділення, тригонометричних перетворень та інших. При безперервному аналізі інформаційних процесів, що відбуваються в природі та технічних системах, необхідний безперервний прийом потоку даних, безперервна обробка інформаційних елементів потоку у міру їх надходження і безперервне формування результату в процесі обробки. Для вирішення таких завдань необхідно створення елементів і пристроїв, орієнтованих на потокову обробку інформації.

Реалізація потокового методу обчислень полягає в розгортці кодової інформації в часі з одночасним паралельно-послідовним виконанням перетворень над бітами і отриманими потоками час-імпульсних сигналів відповідно до необхідної функції.

У більшості випадків чутливі елементи сенсорів формують аналогові вихідні сигнали, що призводить до необхідності їх перетворення в цифрову форму. При використанні сенсорів часто потрібно виконувати лінеаризацію вихідних сигналів, причому необхідно обчислювати різні нелінійні функції. Таким чином, розробка спеціалізованих апаратних модулів, що виконують обчислювальні перетворення біт-потокових даних, є актуальною [3, 4]. Крім того, в даний час є актуальними питання створення підходів до вирішення завдання синтезу обчислювачів, які, з одного боку, дозволяли б відтворювати більш широкий спектр функціональних залежностей одним методом, а з іншого – використовувати при технічній реалізації пристроїв однотипні вузли і блоки, забезпечуючи при цьому виконання заданих вимог за точністю та часом обчислення (відтворення) апроксимуючої функції.

При представленні вхідних і вихідних величин спеціалізованих обчислювачів імпульсними потоками реалізація більшості операцій в них є більш простою в порівнянні з іншими видами кодування. Названа перевага є важливою, оскільки в області вимірювання, управління і контролю пред'являються більш жорсткі вимоги до надійності роботи систем [5].

Метою роботи є дослідження та розробка концепції ступінчастої апроксимації функцій визначеного класу, аргумент яких представлений імпульсним потоком. Запропонований метод формування приростів при функціональному перетворенні імпульсних потоків є оптимальним з точки зору часу і точності обчислення (відтворення).

2. Метод формування приростів висхідних ступінчастих функцій

В [6] запропоновано метод ступінчастої апроксимації відтворення безперервних висхідних функцій. Було зазначено, що в даний час знаходять застосування цифрові спеціалізовані обчислювачі для відтворення безперервних висхідних функцій $y^* = f(x^*)$ ступінчастим методом що мають обмеження

$$x^*,\ y^* \geq 0,\ y_i > y_{i-1},\ y \leq x,$$

$$\frac{dy^*}{dx^*} > 0\,, \qquad (1)$$

функція $y^* = f(x^*)$ має зворотну $x^* = \psi(y^*)$.

При таких обмеженнях функції даного класу є монотонно зростаючими, що умовно розподіляються на два підкласи: першому з них належать функції, які знаходяться нижче бісектриси, а другому – вище бісектриси першого координатного кута.

Вхідними і вихідними інформаційними сигналами обчислювачів, що розглядаються, є імпульсні потоки. Періодичність проходження імпульсів вхідного потоку визначається способом квантування відтворюваної функції по аргументу, а періодичність проходження імпульсів вихідного потоку - алгоритмом функціонування пристрою.

У разі, коли функція y^* змінюється монотонно, на вхід пристрою подають періодичну імпульсну послідовність прямокутної форми, забезпечуючи рівномірне квантування аргументу цілочисельними значеннями x = 1,2,3, ...

Як правило, при синтезі таких пристроїв у першу чергу мінімізують час і похибку обчислення.

У разі, коли аргумент x і значення функції y представлені імпульсними потоками, мінімально можливий час обчислення буде забезпечено, якщо за час введення в спеціалізований обчислювач x одиничних імпульсів вхідного імпульсного потоку на його виході формується значення функції y, що являє собою вихідний імпульсний потік.

З точки зору точності роботи пристрою оптимальним може бути режим, що забезпечує для всіх цілочисельних значень граничне значення абсолютної похибки $|\delta_{max}|$ обчислення, що не перевищує половини одиниці молодшого розряду аргументу.

У зв'язку з цим реалізація оптимального методу формування ступінчастих функцій з точки зору точності та часу обчислення (відтворення) має включати основні етапи:

1. Вибір апроксимуючої ступінчастої функції y для заданої безперервної $y^* = f(x^*)$ та гранично-

го значення абсолютної похибки $|\delta_{max}|$ її обчислення в цілочисельних точках.

2. Встановлення функціонального зв'язку у вигляді аналітичної залежності між номерами вихідних імпульсів y=1, 2, 3, ... пристрою та відповідними їм вхідними імпульсами $x_y = x_1$, x_2, x_3 ...., що обираються з вхідного потоку x.

3. Створення обчислювача, що забезпечує формування імпульсів вихідного потоку в моменти надходження на його вхід x_1, x_2, x_3, … імпульсів потоку x.

Обмеження $y \le x$ дозволяє стверджувати, що забезпечити безперервне формування приростів функції на виході пристрою можна шляхом послідовної вибірки певних імпульсів вхідного імпульсного потоку по мірі їх надходження на вхід обчислювача. Так, при x=100 значення функції $y = \sqrt{x}$ дорівнює 10. Це означає, що структура обчислювача, яка реалізує дану функцію, повинна забезпечити вибірку десяти імпульсів зі ста, що надійшли на його вхід. Виникає питання: які номери імпульсів x_y вхідного імпульсного потоку мають підлягати вибірці $y = \overline{1,10}$?

У більшості випадків число одиничних імпульсів в імпульсному потоці аргументу є величина випадкова і задані лише його граничні значення x_{min} та x_{max}, при цьому x_{max} має порядок $10^6 \div 10^9$ та більше. Крім того, навіть при порівняно невеликому числі біт в імпульсних потоках x і y існує певна кількість варіантів організації вибірки y біт з вхідного імпульсного потоку x, при цьому ставиться завдання пошуку раціонального і оптимального варіантів вибірки.

При методі формування ступінчастих функцій, що розглядається, процес обчислення їх цілочисельних значень в обчислювачі пов'язаний з операцією округлення дробових значень ґратчастої функції до цілих чисел в цілочисельних точках.

Залежно від граничного значення $|\delta_{max}|$ абсолютної похибки округлення такому обчисленню відповідає певний порядок проходження вихідних імпульсів пристрою.

Проведений аналіз показує, що існує певна функціональна залежність між видом функції, що обчислюється $y = f(x)$, граничним значенням $0,5 \le |\delta_{max}| < 1$ абсолютної похибки обчислення функції, номерами імпульсів y = 1, 2, 3,. . . вихідного імпульсного потоку пристрою і відповідними їм імпульсами x_y вхідного імпульсного потоку, що дозволяє знайти всі ці варіанти. Встановлення цього зв'язку дає можливість отримати формулу загального члена x_y числової послідовності x_1, x_2, x_3, …, подальший аналіз якої дає можливість перейти до синтезу технічного пристрою, що практично здійснює в ньому обчислення членів визначеного числового ряду.

Перейдемо до встановлення цієї залежності.

Насамперед зауважимо, що при даному підході цілочисельні значення функції y, що обчислюються із заданою похибкою $|\delta_{max}|$, можуть бути відтворені на виході обчислювача однією з двох ступінчастих функцій:

$$y = [f(x) + |\delta_{max}|] \tag{2}$$

або

$$y = [f(x) + 1 - |\delta_{max}|], \tag{3}$$

де x=1,2,3,...; $|\delta_{max}|$ – задане граничне значення абсолютної похибки відтворення відповідних безперервних функцій. В (2), (3) квадратні дужки позначають цілу частину числа при обмеженні $y \le x$. Тому зазначена залежність в рівній мірі може бути встановлена шляхом аналізу будь-якого з виразів (2), (3).

Перейдемо до пошуку значень $x_y = x_1$, x_2, x_3,… незалежної змінної x, що відповідають моментам початку формування кожної y = 1,2,3, ... сходинки апроксимуючої вихідної функції пристрою.

Для функції (2) з урахуванням обмеження $y \le x$ при будь-якому рівні $y - |\delta_{max}|$, де y =1,2,3, ..., можна вказати пару сусідніх цілочисельних значень аргументу $x_y - 1$ та x_y, для яких має місце система нерівностей

$$\begin{cases} f(x_y - 1) < y - |\delta_{max}|, \\ f(x_y) \ge y - |\delta_{max}|. \end{cases} \tag{4}$$

Визначаючи з системи (4) значення x_y, отримаємо формулу загального члена числової послідовності x_1, x_2, x_3,..., що відповідає обраним розрядам вхідного імпульсного потоку, тобто вузлам апроксимації вихідної функції y:

$$\Psi(y - |\delta_{max}|) \le x_y < \Psi(y - |\delta_{max}|) + 1, \tag{5}$$

де $\Psi(y - |\delta_{max}|)$ - функція, зворотна $f(x)$.

Значення x_y можуть бути знайдені шляхом послідовної підстановки y = 1, 2, 3, ... в нерівність (5) обчисленням лівої її частини і округленням одержуваних дискретних значень в більшу сторону до найближчого цілого числа, або обчисленням правої її частини і округленням в меншу сторону.

Оскільки ліва і права частини нерівності (5) відрізняються на одиницю, кожне таке округлення дозволяє отримати єдине значення цілого числа x_y.

З огляду на це нерівність (5) можна замінити рівністю

$$x_y = \left[\Psi(y - |\delta_{max}|)\right] + 1 . \qquad (6)$$

При значеннях y, яким відповідають цілочисельні значення $\Psi(y - |\delta_{max}|)$, нерівність (5) трансформується в рівність

$$x_y = \Psi(y - |\delta_{max}|) . \qquad (7)$$

Шляхом аналогічних розмірковувань може бути отримана формула

$$\Psi(y - (1 - |\delta_{max}|)) \le x_y < \Psi(y - (1 - |\delta_{max}|)) + 1 \quad (8)$$

загального члена числової послідовності для функції (3) і похідні від неї

$$x_y = \left[\Psi(y - (1 - |\delta_{max}|))\right] + 1 , \qquad (9)$$

$$x_y = \Psi(y - (1 - |\delta_{max}|)) , \qquad (10)$$

аналогічні (6), (7) відповідно.

Вибір групи розрахункових співвідношень (5), (6), (7) або (8), (9), (10) при синтезі обчислювача повинен мати переваги однієї з них по відношенню до іншої, наприклад, з точки зору простоти технічної реалізації.

Оскільки $(1 - |\delta_{max}|) \to 0{,}5$ при $|\delta_{max}| \to 0{,}5$, значення x_y, що визначаються кожною парою нерівностей (5), (8) при $|\delta_{max}| = 0{,}5$ приймають вигляд

$$\Psi(y - 0{,}5) \le x_y < \Psi(y - 0{,}5) + 1 , \qquad (11)$$

$$x_y = \left[\Psi(y - 0{,}5)\right] + 1 , \qquad (12)$$

$$x_y = \Psi(y - 0{,}5) . \qquad (13)$$

Вирази (11), (12), (13) відповідають оптимальному варіанту вибірки з точки зору точності обчислення значень функції y в цілочисельних точках незалежної змінної x.

У випадку, коли абсолютна похибка обчислень $|\delta_{max}| = 0{,}5$, буде забезпечена мінімальна похибка обчислення функції.

В окремому випадку, коли $|\delta_{max}| = 0{,}5$, нерівності (5), (8) трансформуються в нерівність (11), яка є основним розрахунковим співвідношенням для обчислення x_y. При цьому рішення виходить єдиним.

Як приклад використаємо запропоновану вище методику обчислення x_y для функції $y = \sqrt[3]{x}$, що апроксимує безперервну $y^* = \sqrt[3]{x^*}$ з абсолютною похибкою обчислення $|\delta_{max}| = 0{,}8$.

Скористаємося виразами (5) і (8), що для заданих вихідних даних приймають вигляд

$$(y - 0{,}8)^3 \le x_y < (y - 0{,}8)^3 + 1 \quad , \qquad (14)$$

$$(y - 0{,}2)^3 \le x_y < (y - 0{,}2)^3 + 1 . \qquad (15)$$

Підставляючи в (14), (15) значення y=1, 2, 3,… та обчислюючи відповідні цілочисельні значення x_y, отримаємо дві числові послідовності 1, 2, 11, 33, 75, … та 1, 6, 22, 55, 110, …, кожна з яких ініціює формування на виході обчислювача функцій $y = [\sqrt[3]{x} + 0{,}8]$ та $y = [\sqrt[3]{x} + 0{,}2]$ відповідно.

Зауважимо, що наведені два рішення поставленого завдання не є єдиними. Існує множина числових послідовностей $x_1, x_2, x_3, \ldots$, що забезпечують абсолютну похибку обчислення функції y не гірше 0,8 одиниці молодшого розряду числа x, тому що ця похибка буде забезпечена при заміні в (5), (8) значення $|\delta_{max}| = 0{,}8$ будь-яким іншим в діапазоні $0{,}5 \le |\delta_{max}| < 0{,}8$.

При цьому кожному фіксованому значенню $|\delta_{max}|$ з даного інтервалу, за винятком випадку $|\delta_{max}| = 0{,}5$, відповідає два рішення завдання. Тому рішення, що наведені, гарантують виконання вимог з точністю тільки для правого кінця інтервалу [0,5; 0,8] похибки $|\delta_{max}|$.

Для функції $y = \sqrt[3]{x}$ та $|\delta_{max}| = 0{,}5$ нерівність (11) приймає вигляд

$$(y - 0{,}5)^3 \le x_y < (y - 0{,}5)^3 + 1 . \qquad (16)$$

Підставляючи в (16) y=1, 2, 3,…, отримаємо x_y=1, 4, 16, 43, … Визначена послідовність формує на виході обчислювача функцію $y = [\sqrt[3]{x} + 0{,}5]$, оптимальну з точки зору точності відтворення ґратчастої функції $y=\sqrt[3]{x}$ в цілих числах.

Наведений приклад показує перевагу запропонованого методу.

Метод ступінчастої апроксимації безперервних функцій, розглянутий для функцій, що обмежені умовою $y \le x$, лежать нижче бісектриси першого координатного кута. Особливістю є те, що число вихідних одиничних імпульсів y завжди менше від числа вхідних одиничних імпульсів x.

Очевидно, для функцій, обмежених умовою $y > x$, число вихідних імпульсів y обчислювача на інтервалі відтворення завжди більше від числа вхідних x.

З математичної точки зору це означає, що для таких функцій одному і тому ж значенню x_y в (5) або в (8) відповідає деяка підмножина значень вихідної функції y.

Розглянемо приклад. Для функції $y^* = x^{*\frac{2}{3}}$ і заданої похибки $|\delta_{max}| = 0{,}5$ вираз (5) приймає вигляд

$$(y-0{,}5)^{\frac{2}{3}} \le x_y < (y-0{,}5)^{\frac{2}{3}} + 1. \qquad (17)$$

Для $x_y = 2$ остання нерівність буде виконуватись при y=1,2 і 3. Для $x_y = 3$ нерівність буде виконана при y = 4 і 5.

Отже, алгоритм роботи обчислювача при відтворенні даної функції має бути таким, щоб при надходженні на його вхід, наприклад, третього одиничного імпульсу вхідного потоку x на його виході формувались два одиничних імпульси вихідного потоку y.

3. Метод формування приростів спадних ступінчастих функцій

Запропонований метод відтворення безперервних функцій може знайти застосування не тільки для функцій, що мають обмеження (1), але й для монотонно спадних функцій, що мають обмеження

$$x^*, y^* > 0, \quad \frac{dy^*}{dx^*} > 0,$$

$$f(x^*-1) - f(x^*) \le 1, \qquad (18)$$

$$y^* \to \text{const} \ \text{при} \ x^* \to \infty,$$

функція $y^* = f(x^*)$ має зворотну $x^* = \psi(y^*)$.

Відмінність полягає в тому, що поточні значення ступінчастої функції можуть бути отримані шляхом послідовного віднімання вихідних розрядів обчислювача на відтворюваному інтервалі з цілого числа. При цьому точність і час обчислення (відтворення) визначаються тими ж значеннями, що і для монотонно висхідних функцій.

Визначимо величину незалежної змінної x_y, що відповідають початку формування сходинок вихідної спадної функції y.

З урахуванням названих обмежень можна стверджувати, що для будь-якого з рівнів $y_{max} - (y-1) - |\delta_{max}|$, де y = 1, 2, 3,…, можна вказати пару сусідніх цілочисельних значень аргументу $x_y - 1$ та x_y, для яких має місце система нерівностей

$$\begin{cases} f(x_y - 1) > y_{max} - (y-1) - |\delta_{max}|, \\ f(x_y) \le y_{max} - (y-1) - |\delta_{max}|, \end{cases} \qquad (19)$$

де $0{,}5 \le |\delta_{max}| < 1$ – задане граничне значення абсолютної похибки відтворення безперервних функцій. Оскільки відтворювані безперервні функції монотонно спадні, система нерівностей може бути записана у вигляді

$$\begin{cases} x_y - 1 < \Psi(y_{max} - (y-1) - |\delta_{max}|), \\ x_y \ge \Psi(y_{max} - (y-1) - |\delta_{max}|), \end{cases} \qquad (20)$$

звідки отримаємо

$$\Psi(y_{max} - (y-1) - |\delta_{max}|) \le x_y \le \Psi(y_{max} - (y-1) - |\delta_{max}|) + 1, \quad (21)$$

де $\Psi(y_{max} - (y-1) - |\delta_{max}|)$ – функція, зворотна $f(x)$.

У зв'язку з тим, що спадна функція відтворюється на виході обчислювача із заданою абсолютною похибкою $|\delta_{max}|$ як ступінчастою функцією $y = [f(x) + |\delta_{max}|]$, так і функцією $y = [f(x) + 1 - |\delta_{max}|]$, може бути визначена і друга числова послідовність, відповідна вузлам апроксимації вихідної функції.

У випадку абсолютної похибки відтворення $|\delta_{max}| = 0{,}5$ нерівність (21) трансформується в нерівність

$$\Psi(y_{max} - (y-1) - 0{,}5) \le x_y \le \Psi(y_{max} - (y-1) - 0{,}5) + 1. \quad (22)$$

Це дозволяє визначити формулу загального члена x_y числової послідовності x_1, x_2, x_3,..., що відповідає обраним імпульсам вхідного імпульсного потоку, тобто вузлам оптимальної апроксимації вихідної спадної функції у з точки зору точності відтворення.

Подібно до того, як були отримані вирази (21), (22), можуть бути отримані похідні від них:

$$x_y = \left[\Psi(y_{max} - (y-1) - |\delta_{max}|)\right] + 1\,, \qquad (23)$$

$$x_y = \Psi(y_{max} - (y-1) - |\delta_{max}|)\,, \qquad (24)$$

$$x_y = \left[\Psi(y_{max} - (y-1) - 0{,}5)\right] + 1\,, \qquad (25)$$

$$x_y = \Psi(y_{max} - (y-1) - 0{,}5)\,, \qquad (26)$$

аналогічні (6), (7), (12), (13).

Як приклад розглянемо запропоновану методику обчислення x_y, що відповідає обраним розрядам вхідного імпульсного потоку, для гіперболічної функції $y^* = \dfrac{100}{x^*}$ і граничної похибки її відтворення в цілочисельних точках $|\delta_{max}| = 0{,}6$.

Для заданих вихідних даних, скориставшись формулою (21), можна записати

$$\frac{100}{y_{max} - (y-1) - 0{,}6} \le x_y < \frac{100}{y_{max} - (y-1) - 0{,}6} + 1, \qquad (27)$$

$$\frac{100}{y_{max} - (y-1) - 0{,}4} \le x_y < \frac{100}{y_{max} - (y-1) - 0{,}4} + 1. \qquad (28)$$

Далі визначимо цілочисельне значення x_{min} аргумента x, починаючи з якого для заданої функції виконується обмеження $f(x^* - 1) - f(x^*) \le 1$.

Очевидно, це значення визначиться з нерівності

$$\frac{100}{x_{min}} - \frac{100}{x_{min} + 1} \le 1\ .$$

В загальному випадку для функції $y = \dfrac{c}{x}$ при c=100

$$x_{min} = \begin{cases} \sqrt{c + 0{,}25} - 0{,}5, \text{ якщо } \left\{\sqrt{c + 0{,}25} - 0{,}5\right\} = 0, \\ \left[\sqrt{c + 0{,}25} - 0{,}5\right] + 1, \text{ якщо } \left\{\sqrt{c + 0{,}25} - 0{,}5\right\} \ne 0, \end{cases}$$

для заданих вихідних даних x_{min}=10 і, отже, y_{max} =10. Тому нерівності (27), (28) можна переписати у вигляді

$$\frac{100}{9{,}4 - (y-1)} \le x_y < \frac{100}{9{,}4 - (y-1)} + 1\,, \qquad (29)$$

$$\frac{100}{9{,}6 - (y-1)} \le x_y < \frac{100}{9{,}6 - (y-1)} + 1\,. \qquad (30)$$

Підставляючи в (29), (30) $y = \overline{1{,}9}$ і визначаючи x_y, отримаємо дві числові послідовності 11, 12, 14, 16, 19, 23, 30, 42, 72 і 11, 12, 14, 16, 18, 22, 28, 39, 63, кожна з яких на інтервалі [10; 100] ініціює формування на виході обчислювача функцій $y = \left[\dfrac{100}{x} + 0{,}6\right]$ і $y = \left[\dfrac{100}{x} + 0{,}4\right]$ відповідно.

Розв'язуючи те саме завдання для $|\delta_{max}| = 0{,}5$, отримаємо єдине рішення x_y = 11, 12, 14, 16, 19, 23, 29, 40, 67, що забезпечує оптимальне відтворення гіперболічної функції в цілочисельних точках.

4. Оцінка похибки безперервних функцій

Оцінимо похибку відтворення безперервної функції $y^* = f(x^*)$ ступінчастою функцією (2) на інтервалі $[x_{y-1}; x_y]$ для $0{,}5 < |\delta_{max}| < 1$ при обмеженні $y < x$.

Через те, що на кінцях інтервалу, який розглядається, функція y^* приймає значення $y - 1 - |\delta_{max}| \le f(x_{y-1}) < y - 1$ і $y - |\delta_{max}| \le f(x_y) < y$, а апроксимуюча її функція (2) – значення $y-1$ та y відповідно, для абсолютних похибок $\delta_{y-1}, \delta_y > 0$ в точках $x_{y-1}; x_y$ можна записати

$$\delta_{y-1} = y - 1 - f(x_{y-1})\,, \qquad (31)$$

$$\delta_y = y - f(x_y)\,. \qquad (32)$$

Очевидно, в цих точках має місце $\delta_{y-1}, \delta_y \le |\delta_{max}|$.

У зв’язку з тим, що на інтервалі $[x_{y-1}; x_y]$ значення $[f(x) + |\delta_{max}|]$ апроксимуючої функції (2) постійне і дорівнює $y-1$, а безперервна функція y^* монотонно зростає, похибка відтворення на цьому інтервалі спочатку зменшується до нуля (нулю відповідає точка перетину функції y^* з рівнем $y-1$), а потім знову збільшується в області від'ємних її значень і наприкінці інтервалу $[x_{y-1}; x_y)$ приймає значення $\le |\delta_{max}|$. Це означає, що функція (2) забезпечує похибку відтворення функції y^* не гірше $|\delta_{max}|$ для будь-яких значень змінної x^*.

Аналогічним чином можна оцінити похибку відтворення безперервної функції y^* ступінчастою функцією (3) на інтервалі $[x_{y-1}; x_y)$. При цьому відмінність буде полягати в тому, що в області від'ємних значень ця похибка збільшуватиметься і на правому кінці інтервалу $[x_{y-1}; x_y)$ може прийняти значення $> |\delta_{max}|$.

Обчислимо приріст цієї похибки відносно рівня $y-(1-|\delta_{max}|)$. З (9) випливає, що

$$x_y = [\Psi(y-(1-|\delta_{max}|))] + \varepsilon_y, \qquad (33)$$

де $0 < \varepsilon_y < 1$ – величина, яка доповнює дробове значення $\Psi(y-(1-|\delta_{max}|))$ до найближчого цілого числа.

Якщо функція y^* на інтервалі $[x_{y-1}; x_y]$ досить гладка, величина цього приросту складе $\varepsilon_y(f(x_y) - f(x_y - 1))$. Тому граничне значення похибки $|\delta_y|$ на правому кінці інтервалу $[x_{y-1}; x_y)$ визначиться

$$|\delta_y| = |\delta_{max}| + \varepsilon_y(f(x_y) - f(x_y - 1)). \quad (34)$$

З (34) випливає, що похибка відтворення функції y^* всередині інтервалу $[x_{y-1}; x_y]$ в загальному випадку може бути більша, ніж на його кінцях, на величину $\varepsilon_y(f(x_y) - f(x_y - 1))$.

Виключити цю складову можна шляхом формування на виході обчислювача імпульсів потоку y при надходженні на його вхід кожного $(x_y - 1)$-го імпульсу потоку x з наступною затримкою кожного з них на інтервал часу $(1-\varepsilon_y)T$ відповідно, де T - період слідування імпульсів вхідного потоку обчислювача.

Використовуючи описану вище методику, можна оцінити похибку відтворення спадної безперервної функції ступінчастими (2), (3) на інтервалі $[x_{y-1}; x_y)$. Так, при апроксимації функцією (2) максимальна похибка має місце на правому кінці інтервалу $[x_{y-1}; x_y)$ та визначиться

$$|\delta_y| = |\delta_{max}| + \varepsilon_y(f(x_y - 1) - f(x_y)). \qquad (35)$$

При апроксимації функцією (3) похибка не перевищує заданої $|\delta_{max}|$.

5. Висновки

1. Запропоновано метод формування цілочисельних значень обчислюваних функцій визначеного класу, аргумент яких представлений імпульсним потоком. Метод заснований на вибірці певної частини імпульсів вихідного потоку та забезпечує мінімально можливий час обчислень, що визначається довжиною потоку при заданій граничній абсолютній похибці з інтервалу [0,5;1).

2. Наукова новизна полягає у тому, що з точки зору часу і заданої похибки обчислення (відтворення) $|\delta_{max}|$ оптимальним є запропонований метод формування одиничних приростів ступінчастої функції y в моменти часу, строго відповідні певним цілочисельним значенням аргументу x вхідного імпульсного потоку. Отримано математичні залежності, що встановлюють цю відповідність.

3. У загальному випадку задана абсолютна гранична похибка обчислення $|\delta_{max}|$ може бути забезпечена шляхом формування одного з множини імпульсних потоків x_1, x_2, x_3,…, обумовлених отриманими математичними залежностями при заміні в них величини $|\delta_{max}|$ будь-якою іншою з інтервалу [0,5; $|\delta_{max}|$].

Вибір потоку визначається вимогами певних технічних характеристик проектованих пристроїв.

4. В окремому випадку для $|\delta_{max}| = 0{,}5$ рішення виходить єдиним, тому що існує тільки одна цілочисельна послідовність x_1, x_2, x_3,…, яка забезпечує мінімально можливу похибку обчислення, що не перевищує половину одиниці молодшого розряду аргументу x.

5. Похибка відтворення безперервних функцій y^* ступінчастими y для цілочисельних значень аргументу x завжди не перевищує заданого граничного значення абсолютної похибки $|\delta_{max}|$.

Похибка апроксимації висхідних та спадних функцій ступінчастими (2), (3) відповідно для дробових значень буде більша заданої $|\delta_{max}|$ на правому кінці кожного з інтервалів $(x_{y-1}; x_y)$ на величину $\varepsilon_y(f(x_y) - f(x_y - 1))$ і $\varepsilon_y(f(x_y - 1) - f(x_y))$ відповідно, де $0 < \varepsilon_y < 1$. З ростом x ця складова похибки наближається до нуля. Виключити її вплив можна шляхом формування сходинок функції y в моменти часу, відповідні дробовим значенням змінної x.

Література: **1.** *Буренева О.И., Жирнова О.А.* Битпотоковое устройство извлечения квадратного корня // Изв. ЛЭТИ, 2019, № 2. С. 26 – 32. **2.** *Буренева О.И.* Автореф. диссертации. Отказоустойчивые устройства с реализацией процессов следящего преобразования потоков информационных квантов // Изд. СПбГЭТУ "ЛЭТИ" – 2005. 20 С. **3.** *Дробот П. Н., Дробот Д. А.* Осциллисторные сенсоры с частотным выходом // Южно-Сибирский науч. вестн. 2012, № 1. С. 120 – 123. URL: http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:00045044. **4.** *Al-Makhles D., Patel N., Swain A.* Bit-stream control system: Stability and experimental application // Intern. Conf. on Applied Electronics (AE). Pilsen, Czech Republic: IEEE, 2013. P. 1–6. URL: https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6636470. **5.** *Ларченко Л.В., Хаханова А.В.* Специализированный вычислитель для извлечения корня квадратного из суммы квадратов // Радиоэлектроника и информатика. 2010. №1. С.71–74. **6.** *Ларченко Л.В.* Метод формирования приращений при функциональной обработке единичных кодов // Радиоэлектроника и информатика. 2001. № 3(16). С. 61 – 63.

Транслітерований список літератури:

1. *Bureneva O.I., Zhirnova O.A.* A bit-stream square root extraction device // News of LETI. 2019. No. 2. S. 26 - 32.

2. *Bureneva O.I.* Avtoref. dissertatsii. Otkazoustoychivyye ustroystva s realizatsiyey protsessov sledyashchego preobrazovaniya potokov informatsionnykh kvantov // Izdatel'stvo SPbGETU "LETI" – 2005. 20 S.

3. Drobot P.N., Drobot D.A. Oscillistor sensors with frequency output // South Siberian Scientific. Vestn. 2012. No. 1. S. 120 -123. URL:http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:00045044.

4. *Al-Makhles D., Patel N., Swain A.* Bit-stream control system: Stability and experimental application // Intern. Conf. on Applied Electronics (AE). Pilsen, Czech Republic: IEEE, 2013. P.1–6. URL:https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6636470.

5. *Larchenko L.V., Khakhanova A.V.* Spetsializirovannyy vychislitel' dlya izvlecheniya kornya kvadratnogo iz summy kvadratov // Radioelektronika i informatika. 2010, №1. S.71–74.

6. *Larchenko L.V.* Metod formirovaniya prirashcheniy pri funktsional'noy obrabotke yedinichnykh kodov // Radioelektronika i informatika 2001, № 3(16). S. 61 – 63.

Надійшла до редколегії 08.09.2019

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Мірошник М.А.

Ларченко Ліна Вікторівна, канд. техн. наук, доцент кафедри АПОТ ХНУРЕ. Наукові інтереси: автоматизоване проектування спеціалізованих цифрових систем, язики опису апаратури. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. +380(57) 702-13-26.

Кулак Ельвіра Миколаївна, канд. техн. наук, доцент кафедри АПОТ ХНУРЕ. Наукові інтереси: автоматизоване проектування цифрових автоматів, язики опису апаратури. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. +380(57) 702-13-26.

Ларченко Богдан Дмитрович, аспірант кафедри АПОТ ХНУРЕ. Наукові інтереси: автоматизоване проектування цифрових систем, язики опису апаратури, FPGA. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. +380(57) 702-13-26.

Larchenko Lina Viktorivna, PhD, Associate Professor, Design Automation Department, KNURE. Scientific interests: automated design of digital machines, HDL. Address: Ukraine, 61166, Kharkiv, Nauka Avenue, 14, tel. 702-13-26.

Kulak Elvira Mykolaivna, PhD, Associate Professor, Design Automation Department, KNURE. Scientific interests: automated design of digital machines, HDL. Address: Ukraine, 61166, Kharkiv, Nauka Avenue, 14, tel. 702-13-26.

Larchenko Bogdan Dmitrovich, PhD student, Design Automation Department, KNURE. Scientific interests: automated design of digital machines, HDL, FPGA. Address: Ukraine, 61166, Kharkiv, Nauka Avenue, 14, tel. 702-13-26.